В. Ф. Бутузов
С. Б. Кадомцев
В. В. Прасолов

МГУ - ШКОЛЕ

Геометрия

8

Поурочные разработки

МГУ – ШКОЛЕ

В. Ф. Бутузов
С. Б. Кадомцев
В. В. Прасолов

Геометрия

Поурочные разработки

8 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

2-е издание

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
Б93

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Бутузов В. Ф.
Б93 Геометрия. Поурочные разработки. 8 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, В. В. Прасолов. — 2-е изд. — М. : Просвещение, 2017. — 144 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-043010-4.

Поурочные разработки составлены по учебнику авторского коллектива В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, В. В. Прасолова «Геометрия. 8 класс». В них содержатся методические рекомендации по проведению уроков, распределение задач, самостоятельных и контрольных работ по темам, приводится примерное тематическое планирование, решены некоторые задачи из учебника.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Бутузов Валентин Фёдорович
Кадомцев Сергей Борисович
Прасолов Виктор Васильевич

ГЕОМЕТРИЯ

Поурочные разработки

8 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редакторы *П. А. Бессарабова*, *И. В. Рекман*. Младший редактор *Е. А. Андреенкова*. Художественный редактор *О. П. Боголюбова*. Компьютерная графика *С. А. Крутикова*. Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*. Корректоры *П. А. Тимачёва*, *Н. А. Юсупова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 20.04.11. Формат 60 × $90^1/_{16}$. Бумага газетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 8,14. Тираж 2000 экз. Заказ №

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Ивановская областная типография».
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6.
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 978-5-09-043010-4

Предисловие

Книга предназначена учителям, преподающим по учебнику В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, В. В. Прасолова «Геометрия. 8 класс» под редакцией В. А. Садовничего (М.: Просвещение, 2011).

Поурочные разработки содержат методические рекомендации по проведению уроков. Для каждого урока указаны его задачи и также приведены комментарии к изучаемому на уроке теоретическому материалу, в которых обращается внимание учителя на наиболее важные моменты и особенности изложения этого материала в учебнике. При этом особое внимание уделяется тем понятиям и утверждениям, которые вводятся и обосновываются иначе, нежели в других известных учебниках геометрии. Это относится, в частности, к аксиоме существования прямоугольника (она вводится вместо традиционной аксиомы параллельных прямых), к нестандартному определению тригонометрических функций для углов от 90° до 180°, к отличному от принятых в других учебниках определению подобных треугольников. В поурочных разработках содержатся также комментарии к задачам, которые рекомендуется решить на данном уроке, а также приведены решения наиболее важных и наиболее трудных задач учебника.

Структура учебника для 8 класса такая же, как и учебника для 7 класса. В рамках стандартов второго поколения добавлены задачи исследовательского характера, проектные задачи и задачи для решения с помощью компьютера.

По каждой теме, а часто и по каждому уроку сформулированы основные требования к учащимся: что они должны уметь (формулировать, доказывать, решать, выполнять те или иные универсальные учебные действия) в результате изучения этой темы и выполнения домашнего задания.

По каждой теме предлагается провести самостоятельную работу, а по окончании изучения каждой главы и в конце учебного года — контрольную работу. Самостоятельные и контрольные работы содержатся в подготовленной авторами книге «Дидактические материалы. 8 класс» (М.: Просвещение, 2011).

Учителю следует иметь в виду, что все рекомендации, содержащиеся в книге, являются примерными. В зависимости от уровня учащихся класса учитель может вносить коррективы как в проведение уроков, так и в подбор заданий для классной и домашней работы учащихся.

На всех уроках геометрии нужно исходить из того, что изучение этого предмета направлено не только на достижение предметных целей — знакомство с различными геометрическими фигурами, их свойствами, взаимным расположением, измерениями величин и т. д., но и на решение более важной задачи — формирование личности учащегося, развитие его логического мышления, умения ясно и точно излагать свои мысли, использовать геометрический язык для описания предметов окружающего мира, формирование представлений о математике как универсальном средстве исследования реальных явлений и процессов с помощью их математических моделей, развитие творческих способностей учащихся.

К данному курсу существует **Электронная форма учебника (ЭФУ)** — соответствующая по структуре, содержанию и художественному оформлению печатной форме учебника и включающая в себя интерактивные ссылки, расширяющие и дополняющие материал печатного учебника.

Функциональные особенности ЭФУ:

- удобный и понятный интерфейс и навигация по ЭФУ;
- работа в онлайн- и офлайн-режимах;
- тестовые задания к каждой теме, разделу учебника;
- возможность добавления материалов, созданных учителем;
- инструменты изменения размера шрифта, создания заметок и закладок;
- удобная навигация.

Педагогические возможности использования ЭФУ:

- организация контроля и самоконтроля по результатам изучения темы;
- реализация технологий мобильного, дистанционного или смешанного обучения;
- реализация требований ФГОС по формированию информационно-образовательной среды системой электронных образовательных ресурсов и др.

Уроки 1, 2 Вводное повторение

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: используя «Введение» учебника, повторить основной материал 7 класса. К основному теоретическому материалу 7 класса относятся: свойства смежных и вертикальных углов, теорема о перпендикуляре к прямой, свойства и признак равнобедренного треугольника, признаки равенства треугольников, признаки равенства прямоугольных треугольников, теоремы (прямая и обратная) о серединном перпендикуляре к отрезку и о биссектрисе угла, неравенство треугольника, теорема о сумме углов треугольника и её следствие о внешнем угле треугольника, теоремы о касательной к окружности (прямая и обратная), об угле между касательной и хордой, о вписанном угле, утверждение об отрезках касательных, проведённых из одной точки, базовые задачи на построение с помощью циркуля и линейки.

На уроках учителю следует предлагать учащимся самим сформулировать те или иные теоремы, изученные в 7 классе. При этом (когда это возможно) полезно обращать их внимание на то, что выражает данная теорема — свойство геометрической фигуры или её признак. Например, говоря о равнобедренном треугольнике, можно поставить перед учащимися вопрос таким образом: сформулируйте две теоремы — теорему об углах равнобедренного треугольника и теорему, выражающую признак равнобедренного треугольника.

Целесообразно обратить особое внимание на парные теоремы (прямую и обратную) — можно предложить учащимся вспомнить самим, какие парные теоремы были в курсе геометрии 7 класса. Тем самым часть уроков полезно провести в форме коллективного обсуждения, когда один ученик дополняет ответ другого, третий дополняет ответы первых двух и т. д.

В отношении некоторых теорем следует поставить вопрос о способе (идее) доказательства, не рассматривая всех его деталей. В связи с этим можно вспомнить, что многие теоремы доказывались с помощью наложения (например, теоремы о свойствах и признаке равнобедренного треугольника, о первом и втором признаках равенства треугольников), в ряде теорем использовался метод доказательства от противного (можно предложить учащимся вспомнить, в каких именно).

Говоря о задачах на построение, нужно напомнить учащимся, какие задачи мы относим к числу базовых и можем использовать при решении более сложных задач на построение.

В качестве задачного материала на первых двух уроках можно использовать дополнительные задачи из книги «Дидактические материалы. 7 класс».

Можно также разобрать некоторые задачи, решённые в 7 классе, закрепляющие знание теоретического материала.

Основные требования к учащимся

В результате повторения основного теоретического материала 7 класса учащиеся должны чётко и правильно формулировать теоремы и утверждения, изученные в 7 классе; приводить примеры теорем, которые выражают признаки геометрических фигур, примеры прямой и обратной теорем, примеры теорем, которые доказываются методом от противного; уметь перечислить базовые задачи на построение. Всё это способствует формированию умения систематизировать свои знания.

Уроки 3, 4 Признаки параллельности двух прямых

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: ввести понятие параллельных прямых и названия углов, образованных при пересечении двух прямых секущей; изучить признаки параллельности двух прямых, связанные с накрест лежащими, соответственными и односторонними углами, и использовать эти признаки при решении задач.

Начиная обсуждение темы «Параллельные прямые», можно вспомнить о том, что ещё в 7 классе было установлено: две прямые либо имеют только одну общую точку, т. е. пересекаются, либо не имеют ни одной общей точки, т. е. не пересекаются. Полезно задать учащимся вопрос: а как это было установлено? Наверное, найдётся мало учеников в классе, которые дадут правильный ответ на этот вопрос. Если правильный ответ не даст никто из учеников, то ответ должен дать учитель: сформулированное утверждение о двух прямых непосредственно следует из другого утверждения — через две точки проходит прямая и притом только одна. А откуда следует последнее утверждение? Здесь учителю нужно сказать, что к этому очень важному вопросу, связанному с аксиомами геометрии, мы вернёмся весьма скоро и дадим на него ответ.

После этого нужно дать определение параллельных прямых и параллельных отрезков и ввести обозначение их параллельности.

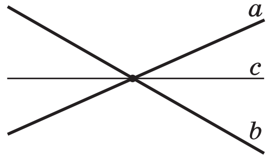


Рис. 1

Затем, используя рисунок 10 учебника (или аналогичный рисунок на доске), следует объяснить, какие углы называются накрест лежащими углами, образованными при пересечении двух прямых секущей. Непременно нужно подчеркнуть, что секущей по отношению к двум данным прямым называется прямая, которая пересекает их в двух точках. Поэтому прямая c на рисунке 1 (полезно нарисовать такой рисунок на доске) не является секущей по отношению к прямым a и b.

После этого нужно сформулировать и доказать теорему, выражающую признак параллельности двух прямых, связанный с накрест лежащими углами.

Сразу после формулировки теоремы (до проведения доказательства) полезно спросить учащихся: о чём эта теорема — о свойстве параллельных прямых или о признаке параллельности? По ходу доказательства при рассмотрении рисунка 11, *б* учебника целесообразно задать учащимся вопрос: почему углы 1 и 2 на этом рисунке не могут быть равными?

После доказательства теоремы, опираясь на рисунок 12 учебника, нужно ввести названия для других пар углов, образованных при пересечении двух прямых секущей, — соответственные углы и односторонние углы. Важно добиться того, чтобы каждый ученик твёрдо усвоил эти названия и безошибочно показывал на рисунке те или иные пары углов.

Формулировки и вывод следствий 1 и 2 учащиеся могут изучить самостоятельно по учебнику. Можно поручить им это в качестве домашнего задания после первого урока по данной теме, а на втором уроке проверить выполнение этого задания, вызвав кого-то к доске для формулировки и вывода следствий 1 и 2.

На первом уроке можно решить задачу 1 а) — для случаев $\angle 3 = \angle 5$ и $\angle 3 = \angle 6 = 90^\circ$ (устно), и задачу 1 б).

Задание на дом: п. 41; вопросы 1—3 (с. 32); задачи 2 а) и 2 б).

Второй урок следует посвятить решению остальных задач из задания 1.

Задание на дом: п. 41; вопросы 1—3 (с. 32); оставшиеся задачи из задания 2.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 41 учащиеся должны уметь формулировать определение параллельных прямых, указывать на рисунке накрест лежащие, соответственные и односторонние углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, формулировать и доказывать теорему, выражающую признак параллельности двух прямых, и её следствия; проявить умение работать с текстом учебника и использовать признаки параллельности двух прямых при решении задач такого типа, как в задании 1.

Уроки 5, 6 Основная теорема о параллельных прямых

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: доказать основную теорему о параллельных прямых, вывести из неё два следствия и решить важную задачу на построение: построить прямую, проходящую через данную точку параллельно данной прямой.

Учителю следует обратить внимание учащихся на то, что в основной теореме о параллельных прямых содержатся два утверждения: 1) через точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной; 2) такая прямая только одна. Первое утверждение доказывается весьма просто: из данной точки M проводится перпендикуляр MH к данной прямой a, а затем через точку M проводится прямая b, перпендикулярная к прямой MH (рис. 2). Поскольку прямые a и b перпендикулярны к одной и той же прямой MH, то они не пересекаются (этот факт был установлен в 7 классе). Итак, мы доказали, что через данную точку M проходит прямая b, параллельная данной прямой a.

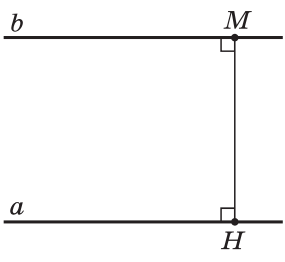


Рис. 2

В отношении второго утверждения — о единственности прямой, проходящей через данную точку M параллельно данной прямой a, — учителю нужно иметь в виду, что во многих курсах геометрии оно не требует доказательства, поскольку принимается в качестве одной из аксиом и называется аксиомой параллельных прямых. В нашем курсе геометрии этой аксиомы нет, вместо неё принимается аксиома существования прямоугольника, две смежные стороны которого равны данным отрезкам. Эта аксиома уже использовалась в 7 классе, хотя и не называлась там аксиомой. Разговор с учащимися об аксиомах пока преждевременен, он состоится немного позже, поэтому второе утверждение основной теоремы о параллельных прямых нужно рассматривать пока без сопоставления его с аксиомой параллельных прямых.

Для доказательства второго утверждения нужно доказать, что любая прямая, проходящая через данную точку M и отличная от прямой b, пересекается с прямой a. Приведённое в учебнике доказательство опирается на утверждение, установленное ещё в 7 классе: если в четырёхугольнике три угла прямые, то этот четырёхугольник является прямоугольником. Поэтому в ходе доказательства нужно акцентировать внимание учащихся на этом утверждении.

Следует обратить внимание учащихся и на замечание, сделанное после доказательства теоремы. На нём будет основано доказательство утверждения п. 67.

На первом уроке после обсуждения основной теоремы о параллельных прямых нужно вывести два следствия из неё. Можно предложить учащимся самим разобраться с выводом следствий по учебнику, а затем на том же уроке или в начале второго урока провести проверку усвоения этих следствий.

Задание на дом: п. 42; вопросы 4—7 (с. 32); задачи 4 а), 4 б).

Второй урок целесообразно посвятить решению задач, начав урок с решения задачи на построение: построить прямую, проходящую через данную точку M, не лежащую на данной прямой a, и параллельную прямой a. После этого следует решить задачи из задания 3.

Задание на дом: п. 42; вопросы 4—7 (с. 32); задачи 4 в), 4 г).

При решении задачи 4 г) определённая трудность возникает при обосновании того, что построенная прямая перпендикулярна к радиусу данной окружности. Эту трудность было бы легко преодолеть, если бы были уже известны свойства параллельных прямых, которые изучаются лишь в следующем пункте. Как обойтись без использования этих свойств, показано в решении задачи 4 г), приведённом на с. 62.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 42 учащиеся должны уметь формулировать основную теорему о параллельных прямых и различать в ней два утверждения; уметь доказывать первое утверждение теоремы и выводить два следствия из неё на основе самостоятельного изучения и осмысления текста учебника; уметь объяснить, как построить прямую, проходящую через данную точку параллельно данной прямой, и какие базовые задачи на построение при этом используются; решать задачи такого типа, как в задании 3.

Уроки 7, 8 Свойства параллельных прямых

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: доказать теорему о равенстве накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, вывести следствия из неё и доказать утверждение, обратное следствию 4; ввести понятие расстояния между параллельными прямыми.

Урок можно начать с обсуждения решения задачи 4 г) из домашнего задания. При решении этой задачи возникает вопрос: если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то будет ли она перпендикулярна к другой прямой? Нужно обратить внимание учащихся на то, что ответ на этот вопрос положительный, но пока мы не можем это обосновать. Обоснование будет дано позже, а задачу 4 г) можно решить и не используя утвердительного ответа на возникший вопрос. Учителю следует объяснить соответствующее решение (оно приведено на с. 62).

Затем можно попросить кого-то из учеников вспомнить формулировку теоремы о признаке параллельности двух прямых, связанном с накрест лежащими углами, и сформулировать обратную теорему. После обсуждения доказательства обратной теоремы полезно ещё раз обратить внимание учащихся на то, что в первой из этих двух теорем речь идёт о признаке параллельности двух прямых, а в обратной теореме — о свойстве параллельных прямых. Можно предложить учащимся сформулировать обе теоремы вместе с использованием словосочетания «тогда и только тогда». Возможны две формулировки: 1) при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны тогда и только тогда, когда эти две прямые параллельны; 2) две прямые параллельны тогда и только тогда, когда при пересечении их секущей накрест лежащие углы равны. Каждая из этих формулировок содержит два утверждения. Для каждой из них полезно обсудить вопрос о том, что дано и что требуется доказать, если в формулировке оставить слово «тогда» и опустить слова «и только тогда» и наоборот — если опустить слова «тогда и» и оставить слова «только тогда». Всё это будет способствовать выработке у учащихся таких качеств, как умение анализировать, выдвигать гипотезы, структурировать знания, грамотно формулировать математические высказывания.

Вывод следствий 1—3 можно провести в устной форме, рассматривая рисунок 20 учебника (или плакаты, сделанные по этому рисунку). При выводе следствия 3 целесообразно поставить вопрос: откуда следует, что прямая c пересекается с прямой b? Ответ таков: так как прямая c пересекает прямую a, то она пересекает и прямую b, параллельную прямой a (следствие 1 из п. 42).

В классе можно решить задачи 5 а), 5 б), 5 в).

Задание на дом: п. 43 (до следствия 4); вопросы 8, 9 (с. 32); задачи 6 а), 6 б), 6 в).

На втором уроке нужно обсудить вывод следствия 4 и, опираясь на это следствие, дать определение расстояния между двумя параллельными прямыми. В качестве мотивировки такого определения можно отметить, что расстояние между параллельными прямыми — это наименьшее из всевозможных расстояний между двумя точками, взятыми по одной на каждой из параллельных прямых.

Затем нужно доказать утверждение, обратное следствию 4. Полезно сказать об одном практическом приложении обратного утверждения — оно даёт обоснование того, что столярный инструмент, называемый рейсмусом, на деревянном бруске прочерчивает отрезок прямой, параллельной краю бруска. После этого можно решить задачи 5 г) и 7 а).

Задание на дом: п. 43; вопросы 10—12 (с. 32); задачи 6 г), 8 а).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 43 учащиеся должны уметь формулировать и доказывать теорему о равенстве накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, и следствия из неё; уметь объяснять, для какой теоремы она является обратной, что выражает (свойство параллельных прямых или признак) та и другая теорема; уметь формулировать определение расстояния между параллельными прямыми (с соответствующей мотивировкой), формулировать утверждение, обратное следствию 4; решать задачи такого типа, как 5 а), 5 б), 5 в), 5 г), 7 а).

Урок 9 Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: доказать теорему об углах с соответственно параллельными сторонами и её следствие — об углах с соответственно перпендикулярными сторонами; продолжить решение задач с использованием признаков и свойств параллельных прямых.

Учителю следует самому рассказать доказательства теоремы об углах с соответственно параллельными сторонами и её следствия об углах с соответственно перпендикулярными сторонами.

После этого можно решить задачи 5 д), 5 е).

Задание на дом: п. 44; вопрос 13 (с. 32); задачи 6 д), 6 е).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 44 учащиеся должны уметь формулировать и доказывать теорему об углах с соответственно параллельными сторонами и её следствие об углах с соответственно перпендикулярными сторонами.

Урок 10 Об аксиомах геометрии

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: провести самостоятельную работу № 1; сформировать у учащихся первое представление об аксиомах и аксиоматическом методе в геометрии; рассказать о связи между принятой в данном курсе аксиомой существования прямоугольника и основной теоремой о параллельных прямых.

В первой половине урока нужно провести самостоятельную работу № 1, а во второй половине урока рассказать об аксиомах и аксиоматическом методе в геометрии, используя п. 45 учебника и приложение «Об аксиомах и основных понятиях планиметрии». При этом нет необходимости приводить всю систему аксиом, принятую в данном учебнике. Главное, на что следует обратить внимание учащихся, состоит в том, что поскольку каждое доказательство должно на что-то опираться, то не все утверждения можно доказать. Какие-то утверждения, самые очевидные, не вызывающие сомнений, должны быть приняты в качестве исходных положений, опираясь на которые можно доказывать новые утверждения (теоремы) и таким образом возводить здание геометрии. В этом и состоит суть аксиоматического метода.

Некоторые аксиомы, которые фактически использовались в нашем курсе, следует сформулировать, приведя один-два примера их использования. Например, можно напомнить учащимся, что на самом первом уроке, посвящённом параллельным прямым, было упомянуто утверждение, установленное ещё в 7 классе: две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют ни одной общей точки, и было отмечено, что доказательство этого утверждения основано на другом утверждении: через две точки проходит прямая и притом только одна. Тогда же был поставлен вопрос: а откуда следует это (второе) утверждение? Теперь мы можем дать ответ на этот вопрос: второе утверждение мы не доказываем на основе каких-то других утверждений, а принимаем в качестве исходного положения, т. е. в качестве аксиомы.

Особое внимание в рассказе об аксиомах следует уделить аксиоме существования прямоугольника, две смежные стороны которого равны двум данным отрезкам. Нужно напомнить учащимся, что эту аксиому мы использовали ещё в 7 классе, когда доказывали утверждение: если один из углов треугольника прямой, то сумма двух других углов этого треугольника равна $90°$. В свою очередь, опираясь на это утверждение, мы доказали целый ряд других утверждений, в частности теорему о сумме углов треугольника.

Если внимательно проследить за разворачивающейся последовательностью теорем и их следствий в нашем курсе геометрии, то можно обнаружить, что аксиома существования прямоугольника использовалась (хотя и не непосредственно) в доказательстве основной теоремы о параллельных прямых. Таким образом, аксиома существования прямоугольника, как и другие аксиомы, играет фундаментальную роль в построении нашего курса геометрии.

Можно отметить, что системы аксиом могут быть различными. Во многих курсах геометрии в качестве одной из аксиом принимают аксиому параллельных прямых: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной. В таком случае можно доказать, что существует прямоугольник, две смежные стороны которого равны двум данным отрезкам, т. е. наша аксиома существования прямоугольника становится не аксиомой, а теоремой. В нашем же курсе наоборот: утверждение о существовании прямоугольника, две смежные стороны которого равны двум данным отрезкам, является аксиомой, а утверждение, называемое аксиомой параллельных прямых, является у нас теоремой, которую мы назвали основной теоремой о параллельных прямых.

Полезно упомянуть о знаменитом сочинении «Начала» древнегреческого учёного Евклида, в котором не было ни аксиомы существования прямоугольника, ни аксиомы параллельных прямых, но была эквивалентная им аксиома — пятый постулат Евклида: если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов меньше 180°, то эти прямые пересекаются по ту сторону от секущей, по которую расположены указанные углы. Изложенную в «Началах» геометрию стали называть евклидовой геометрией. Её мы и изучаем, используя при этом систему аксиом, отличную от той, которой пользовался Евклид. От различных систем аксиом евклидовой геометрии требуется лишь, чтобы они приводили к одним и тем же выводам.

И наконец, можно сказать несколько слов о том, что существуют другие геометрии, в частности геометрия, созданная великим русским учёным Н. И. Лобачевским. В этой геометрии вместо аксиомы параллельных прямых принято такое утверждение: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не менее двух прямых, не пересекающих эту прямую.

Задание на дом: п. 45.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 45 учащиеся должны уметь объяснить, что такое аксиомы геометрии и почему они необходимы, приводить примеры аксиом и их использования в доказательствах теорем, формулировать аксиому существования прямоугольника и тем самым проявить способность к структурированию знаний.

Урок 11 Решение задач

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: обсудить задачу 7 б) и другие задачи на построение, при решении которых она выступает в роли одной из базовых задач.

Урок следует посвятить решению задач на построение, начав с задачи 7 б), которая в дальнейшем играет такую же роль в задачах на построение, как и базовые задачи, рассмотренные в 7 классе, — нередко одним из этапов решения задачи на построение оказывается построение прямой, которая параллельна данной прямой, а расстояние между этими прямыми равно длине данного отрезка (это и требуется сделать в задаче 7 б)).

Затем нужно решить задачи 7 в) и 7 г). Можно напомнить учащимся, что задачу 7 г) они уже решали в 7 классе, но тогда в основе решения лежала базовая задача о построении прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету. Теперь же нужно предложить другой способ решения, при котором одним из этапов является построение прямой, проходящей параллельно другой (уже проведённой) прямой на расстоянии от неё, равном данной высоте треугольника. Таким образом, в качестве одной из базовых задач при решении задачи 7 г) выступает теперь задача 7 б). Полное решение задачи 7 г) приведено на с. 65.

При наличии времени можно решить в классе некоторые из дополнительных задач к § 11 (задачи 34—36).

Задание на дом: задачи 8 б), 8 в), 8 г).

Уроки 12, 13 Теорема о пересечении биссектрис треугольника. Вписанная окружность

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: доказать две теоремы — о пересечении биссектрис треугольника в одной точке и об окружности, вписанной в треугольник; использовать эти теоремы при решении задач; продолжить формирование умения учащихся самостоятельно работать с текстом учебника.

На первом уроке целесообразно обсудить доказательства обеих теорем. Можно напомнить учащимся, что вопрос о пересечении биссектрис треугольника в одной точке возник ещё в 7 классе. Теперь будет дан обоснованный ответ на этот вопрос, для чего нужно вспомнить теорему о биссектрисе угла и обратную ей. Желательно, чтобы учащиеся сами сформулировали эти теоремы, обе они используются при доказательстве теоремы о пересечении биссектрис треугольника. По ходу доказательства учителю полезно ставить перед учениками вопросы: откуда следует, что перпендикуляры OD, OE и OF, проведённые из точки O пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 к прямым AB, BC и CA, равны? Каким образом (на основании чего) из равенства этих перпендикуляров вытекает, что точка O лежит также на биссектрисе CC_1? Тем самым доказательство теоремы о пересечении биссектрис треугольника можно провести в форме совместного поиска доказательства.

Затем нужно дать определения окружности, вписанной в треугольник, и треугольника, описанного около окружности, и перейти к теореме об окружности, вписанной в треугольник. Формулировку и доказательство этой теоремы учащиеся могут самостоятельно прочитать в учебнике, после чего желательно, чтобы кто-то из них рассказал доказательство у доски.

Следует подчеркнуть, что в данной теореме два утверждения: первое — о существовании вписанной в данный треугольник окружности, второе — о единственности вписанной окружности.

При проведении урока можно использовать проектное задание № 2 (с. 138 учебника).

Задание на дом: пп. 46, 47; вопросы 14, 15 (с. 32); задачи 10 а), 10 б).

На втором уроке нужно повторить теоремы из пп. 46 и 47 в ходе решения задач из задания 9. Кроме того, в связи с задачей 9 в) возникает потребность вспомнить утверждение об отрезках касательных, проведённых из одной точки, а в связи с задачей 9 г) — теорему о свойстве параллельных прямых и второй признак равенства треугольников. Решения этих задач приведены на с. 66.

Задание на дом: пп. 46, 47; вопросы 14, 15 (с. 32); задачи 10 в), 10 г).

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения пп. 46 и 47 учащиеся должны проявить умение самостоятельно работать с текстом учебника, формулировать и доказывать теоремы этих пунктов; уметь объяснить, какая окружность называется вписанной в треугольник и какой треугольник называется описанным около окружности; решать задачи такого типа, как в задании 9.

Уроки 14, 15 Теорема о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Описанная окружность

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: доказать две теоремы — о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника в одной точке и об окружности, описанной около треугольника; использовать эти теоремы при решении задач; формировать умение учащихся самостоятельно находить доказательства теорем, используя известные доказательства аналогичных теорем.

Эти два урока целесообразно провести по тому же плану, что и два предыдущих: на первом уроке обсудить доказательства обеих теорем (из пп. 48 и 49), а второй урок посвятить решению задач на применение этих теорем.

Учитель может сказать, что нам понадобятся теорема о серединном перпендикуляре к отрезку и обратная ей теорема, и предложить учащимся вспомнить формулировки этих теорем, а затем сформулировать теорему о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника в одной точке и доказать её по аналогии с доказательством теоремы о пересечении биссектрис треугольника.

После обсуждения доказательства теоремы нужно поставить вопрос: а как доказать, что два серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются? Можно предложить учащимся доказать это самим, а в случае затруднений с их стороны сделать подсказку.

Далее нужно дать определения окружности, описанной около треугольника, и треугольника, вписанного в окружность, и сформулировать теорему об окружности, описанной около треугольника. Можно снова предложить учащимся самим найти доказательство этой теоремы по аналогии с доказательством теоремы об окружности, вписанной в треугольник. При недостатке времени на уроке можно включить поиск доказательства в домашнее задание.

При проведении урока полезно использовать проектное задание № 3 (с. 138 учебника).

Задание на дом: пп. 48, 49; вопросы 16, 17 (с. 32); задачи 12 а), 12 б).

На втором уроке изученные теоремы используются в ходе решения задач из задания 11. В задаче 11 в) заранее неясно, является ли вершина A противоположной основанию равнобедренного треугольника ABC или она служит одним из концов основания. Поэтому нужно рассмотреть два случая и обосновать тот факт, что второй случай невозможен.

Особое внимание следует обратить на задачу 11 г), в которой требуется обосновать красивую формулу, связывающую катеты прямоугольного треугольника с диаметрами вписанной и описанной окружностей. Учащимся полезно запомнить эту формулу.

Решения задач 11 в) и 11 г) приведены на с. 67, 68.

> Задание на дом: пп. 48, 49; вопросы 16, 17 (с. 32); задание 12.

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения п. 48 и 49 учащиеся должны проявить способность к прогнозированию и целеполаганию, умение самостоятельно находить доказательства теорем (этих пунктов) по аналогии с известными доказательствами (теорем из пп. 46 и 47), формулировать и доказывать теоремы этих пунктов; уметь объяснить, какая окружность называется описанной около треугольника и какой треугольник — вписанным в окружность; решать задачи такого типа, как в задании 11.

Уроки 16, 17 Решение задач по темам «Параллельные прямые», «Вписанная и описанная окружности»

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: решать задачи по указанным темам; провести самостоятельную работу № 2 и математический диктант № 1; подготовиться к контрольной работе.

На первом уроке нужно провести самостоятельную работу № 2, а на втором уроке — математический диктант № 1. В оставшееся время на уроках можно решить некоторые задачи из числа дополнительных задач к § 11 и 12 (задачи 13—42).

> Задание на дом: некоторые из дополнительных задач к § 11 и 12 (задачи 13—42).

Урок 18 Контрольная работа № 1

Ответы и указания

Вар. 1. **1.** Нет. **2.** 110°. **3.** Указание. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках E и F. Тогда $BE = BD = CD = CF$. **4.** $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$ и $\angle C = 70°$.

Вар. 2. **1.** Да. **2.** 32°, 32° и 116°. **3.** Указание. Центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на прямой AD. **4.** $\angle BAO = 10°$ и $\angle CAO = 50°$.

Вар. 3. **1.** $\angle C = 90°$, $\angle M = 50°$ и $\angle N = 40°$. **2.** Указание. Доказать, что $\angle AKM = \angle AMK = \angle KLM = \angle MKL$. **3.** 36°. Указание. Угол MBL тупой, поэтому $BM = BL$; $\angle KLC \neq \angle LKC$ и $\angle KLC \neq \angle KCL$, поэтому $KL = CL$. **4.** Указание. Пусть точка L лежит на стороне AB. Тогда $\angle NLM = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle A) - \frac{1}{2}(180° - \angle B) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$.

Вар. 4. **2.** Указание. Сначала доказать, что $\angle LMC = \angle LKM = \angle MKA = \angle KMA$. **3.** 108°. Указание. Угол MBL тупой, поэтому $BM = BL$; $\angle KLC \neq \angle LKC$ и $\angle KLC \neq \angle KCL$, поэтому $KL = CL$. **4.** 50°. Указание. $\angle LMN = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle B) - \frac{1}{2}(180° - \angle C) = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

Урок 19 Выпуклый многоугольник

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятия ломаной, многоугольника и связанную с ними терминологию, понятие выпуклого многоугольника; вывести формулу суммы углов выпуклого n-угольника и формулу суммы его внешних углов.

Начиная урок, можно отметить, что до сих пор мы рассматривали самый простой из многоугольников — треугольник и изучали разнообразные свойства треугольников, используя иногда в доказательствах ещё один многоугольник — прямоугольник. Теперь мы займёмся изучением более сложных многоугольников. Далее, используя рисунки 38 и 39 учебника или плакаты, выполненные по этим рисункам, нужно ввести понятия ломаной, замкнутой ломаной, простой ломаной и дать определение многоугольника как простой замкнутой ломаной. Можно отметить, что уже хорошо изученная нами фигура — треугольник соответствует этому определению, когда число сторон равно трём. Затем нужно ввести терминологию, связанную с многоугольником: n-угольник, стороны и вершины многоугольника, соседние вершины, диагонали (рис. 40 учебника), периметр, окружность, вписанная в многоугольник, и многоугольник, описанный около окружности (рис. 41 учебника), окружность, описанная около многоугольника, и многоугольник, вписанный в окружность (рис. 42 учебника). Все эти понятия учащиеся должны твёрдо усвоить и уметь их иллюстрировать с помощью соответствующих рисунков.

Из всего множества многоугольников мы выделяем одно важное подмножество — выпуклые многоугольники. Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону. Нужно, чтобы учащиеся не только запомнили это определение, но и умели изобразить выпуклый и невыпуклый многоугольники. Полезно уже теперь поставить перед ними такие вопросы (предваряя их более детальное обсуждение при изучении следующего пункта учебника): может ли треугольник быть невыпуклым? Может ли четырёхугольник быть невыпуклым? Если да, то изобразите такой четырёхугольник.

Далее нужно обсудить вопрос о внутренней и внешней областях многоугольника. С наглядной точки зрения представляется очевидным, что каждый многоугольник разделяет плоскость на внутреннюю (по отношению к нему) и внешнюю области и такого наглядного представления и умения указать (закрасить) внутреннюю область данного многоугольника вполне достаточно для учащихся. Вместе с тем учитель может отметить, что, как и в других случаях, наглядная очевидность ещё не является доказательством и, хотя сам факт существования у каждого многоугольника внутренней и внешней областей не вызывает сомнений, обосновать это весьма непросто. Фигуру, состоящую из многоугольника (т. е. простой замкнутой ломаной) и его внутренней области, также называют многоугольником. Такая трактовка многоугольника будет использоваться в 9 классе, когда речь пойдёт о площади многоугольника.

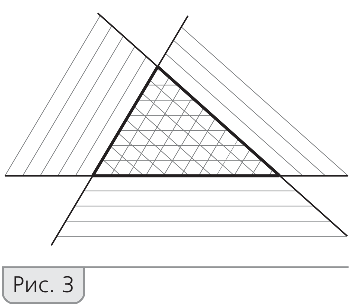


Рис. 3

Для выпуклого многоугольника (и в нашем учебнике только для выпуклого) вводится понятие его углов. Можно отметить и показать на примере треугольника (рис. 3), что внутренняя область выпуклого многоугольника — это общая часть внутренних областей всех его углов.

Далее нужно вывести формулу суммы углов выпуклого n-угольника, разбив его на $n - 2$ треугольника диагоналями, проведёнными из какой-то одной вершины. Сам вывод формулы весьма прост, но тот наглядно очевидный факт, что указанные диагонали разделяют n-угольник на $n - 2$ треугольника, в учебнике не обосновывается, и, разумеется, не следует требовать обоснования от учащихся.

Из полученной формулы следует, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $360°$. Целесообразно предложить учащимся самим доказать это утверждение.

При наличии времени в классе можно решать по порядку задачи из задания 43.

> Задание на дом: п. 50; вопросы 1—6 (с. 74, 75); задание 44.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 50 учащиеся должны усвоить понятия, связанные с ломаной, многоугольником, выпуклым многоугольником; уметь объяснять и иллюстрировать эти понятия, выводить формулы суммы углов выпуклого n-угольника и суммы его внешних углов; решать задачи такого типа, как в задании 43.

Уроки 20, 21 Четырёхугольник

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: повторить материал п. 50, изученный на предыдущем уроке; обсудить свойство сторон и признак описанного четырёхугольника, свойство углов и признак вписанного четырёхугольника.

Первый урок следует начать с проверки усвоения учащимися понятий, введённых на предыдущем уроке, используя иллюстрации этих понятий. Попутно можно решить задачи из задания 43 (оставшиеся нерешёнными на предыдущем уроке) и проверить выполнение домашнего задания, предлагая кому-то из учеников рассказать решение той или иной задачи из задания 44.

Затем нужно перейти к главному объекту этого и следующего уроков — четырёхугольнику, ввести и проиллюстрировать понятия противоположных вершин и противоположных сторон четырёхугольника, изобразить выпуклый и невыпуклый четырёхугольники (рис. 46 учебника) и, используя рисунки, обратить внимание учащихся на то, что каждая диагональ выпуклого четырёхугольника разделяет его на два треугольника, причём диагонали выпуклого четырёхугольника пересекаются, а в невыпуклом четырёхугольнике только одна диагональ разделяет его на два треугольника и диагонали не пересекаются. Можно отметить, что эти наглядно очевидные факты можно обосновать, но это не является обязательным для всех учащихся. Тем же из них, кто проявляет большой интерес к математике, можно предложить изучить соответствующие доказательства по учебнику (они приведены в приложении «Об аксиомах и основных понятиях планиметрии» в конце учебника).

После этого можно решить задачи 45 а), 45 б).

> Задание на дом: п. 51 (до свойства сторон описанного четырёхугольника); вопрос 7 (с. 75); задачи 46 а), 46 б).

В начале второго урока нужно напомнить учащимся определения описанного и вписанного многоугольников (желательно, чтобы эти определения учащиеся сформулировали сами), а затем поставить перед ними вопрос: в любой ли четырёхугольник можно вписать окружность?

Полезно дать учащимся возможность выдвинуть в качестве ответа на вопрос ту или иную гипотезу и попытаться её обосновать путём рассуждений. После того как все убедятся в отрицательном ответе на поставленный вопрос (подтверждением отрицательного ответа служит, например, прямоугольник, отличный от квадрата, см. рис. 47 учебника), нужно задать следующий вопрос: каким свойством обладает описанный четырёхугольник? В качестве подсказки можно выделить на рисунке, сделанном на доске, точки касания вписанной окружности со сторонами четырёхугольника. Если у учащихся опять возникнут затруднения с ответом, можно сделать ещё одну подсказку: воспользуйтесь свойством отрезков касательных, проведённых из одной точки. В результате коллективного обсуждения нужно прийти к обоснованному утверждению о свойстве сторон описанного четырёхугольника.

Затем следует отметить, что верно и обратное утверждение, выражающее признак описанного четырёхугольника. Полезно предложить учащимся самим сформулировать обратное утверждение. Доказательство обратного утверждения не является обязательным для всех учащихся, но желающие могут попробовать провести его (разумеется, не во время урока), используя задачу 79 и указание к ней.

После этого нужно в таком же ключе обсудить утверждения, связанные с вписанным четырёхугольником. При обосновании того, что около четырёхугольника не всегда можно описать окружность, можно рассмотреть четырёхугольник $ABCD$, изображённый на рисунке 4. Такой рисунок полезно нарисовать на доске и спросить учащихся: почему около четырёхугольника $ABCD$ нельзя описать окружность? Желательно, чтобы кто-то из учащихся дал такой ответ: через точки A, B и C проходит только одна окружность (это было доказано ранее, в п. 49), но она, как видно на рисунке, не проходит через точку D, и, следовательно, нет такой окружности, которая проходила бы через все вершины четырёхугольника $ABCD$.

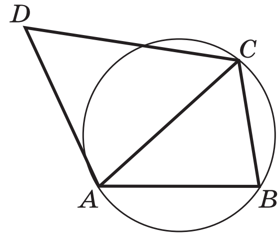


Рис. 4

Затем, нарисовав вписанный четырёхугольник (рис. 5), можно поставить перед учащимися вопрос: что можно сказать об углах A и C? В случае их затруднений с ответом можно конкретизировать вопрос: что можно сказать о сумме углов A и C? Возможно, придётся сделать подсказку: воспользуйтесь тем, что вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. После того как получено равенство $\angle A + \angle C = 180°$, целесообразно задать ещё один вопрос: как сформулировать утверждение, которое мы доказали, и что оно выражает — свойство вписанного четырёхугольника или его признак?

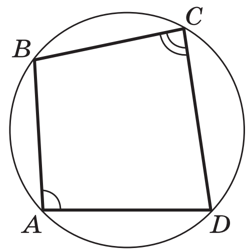


Рис. 5

Разобравшись с этим вопросом, нужно сформулировать обратное утверждение, выражающее признак вписанного четырёхугольника. Его доказательство не является обязательным для всех учащихся, но желающие могут попытаться провести доказательство, используя задачу 78 и указание к ней.

В конце урока желательно решить задачи 45 в), 45 г).

Задание на дом: п. 51; вопросы 8—11 (с. 75); задачи 46 в), 46 г).

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения п. 51 учащиеся должны проявить умение выдвигать гипотезы, самостоятельно находить доказательства новых утверждений, опираясь на уже известные факты; уметь формулировать и доказывать утверждения о свойстве сторон описанного четырёхугольника и свойстве углов вписанного четырёхугольника, формулировать обратные утверждения; решать задачи такого типа, как в задании 45.

Уроки 22, 23 Правильные многоугольники

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: ввести понятие правильного многоугольника; доказать теоремы об окружности, описанной около правильного многоугольника, и об окружности, вписанной в правильный многоугольник; провести самостоятельную работу № 3.

На первом уроке, дав определение правильного многоугольника, можно отметить, что два таких многоугольника нам хорошо известны — равносторонний треугольник и квадрат.

Затем следует рассмотреть теоремы об окружности, описанной около правильного многоугольника, и об окружности, вписанной в правильный многоугольник, причём целесообразно сделать это на одном уроке, поскольку доказательство второй теоремы опирается на некоторые факты, установленные в ходе доказательства первой теоремы. Доказательства теорем учителю следует рассказать самому и после доказательства второй теоремы нужно отметить, что точка, являющаяся одновременно центром описанной около правильного многоугольника и вписанной в него окружностей, называется центром правильного многоугольника.

Далее можно решить несколько задач из задания 47 (на усмотрение учителя).

Задание на дом: п. 52; вопросы 12—15 (с. 75); несколько задач из задания 48 (на усмотрение учителя).

На втором уроке, используя замечание на с. 43 учебника, учителю следует рассказать о построении некоторых правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки, а затем можно решить 2—3 задачи из задания 47.

Во второй половине урока нужно провести самостоятельную работу № 3.

Задание на дом: п. 52; вопросы 12—15 (с. 75); оставшиеся задачи из задания 48.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 52 учащиеся должны уметь объяснить, какой многоугольник называется правильным, формулировать и доказывать теоремы об окружности, описанной около правильного многоугольника, и об окружности, вписанной в правильный многоугольник; решать задачи такого типа, как в задании 47.

Уроки 24, 25 Свойства параллелограмма

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: дать определение параллелограмма, изучить его свойства и использовать их при решении задач.

На первом уроке нужно дать определение параллелограмма, доказать, что параллелограмм — выпуклый четырёхугольник (это следует сделать самому учителю), а затем сформулировать теорему о свойствах сторон и противоположных углов параллелограмма. Первый шаг доказательства — провести диагональ AC, разделяющую параллелограмм на два треугольника, — целесообразно подсказать учащимся, а далее предоставить возможность им самим завершить доказательство теоремы, используя рисунок 55 учебника или плакат, сделанный по нему.

После этого можно отметить, что доказать равенство противоположных углов можно и иначе, не опираясь на признак равенства треугольников, а используя только свойства параллельных прямых. Приведём это доказательство.

Углы A и B параллелограмма $ABCD$ (рис. 6) являются односторонними, образованными при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AB, поэтому $\angle A + \angle B = 180°$. По аналогичной причине $\angle A + \angle D = 180°$. Из этих двух равенств следует, что $\angle B = \angle D$. Таким же образом можно доказать, что $\angle A = \angle C$.

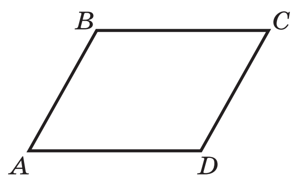


Рис. 6

Желательно, чтобы учащиеся сами отыскали этот способ доказательства (с возможной подсказкой, что нужно использовать свойство односторонних углов). Тем самым у учащихся будет вырабатываться потребность находить наиболее эффективные способы решения задачи.

Затем нужно обсудить вторую теорему (о пересечении диагоналей параллелограмма). Здесь также первый шаг следует сделать учителю, отметив, что диагонали параллелограмма пересекаются, поскольку он выпуклый четырёхугольник. А далее можно предложить учащимся самим завершить доказательство теоремы, используя рисунок, повторяющий рис. 56 учебника, на доске и в тетрадях.

Если позволит время, на первом уроке можно решить какие-то задачи из задания 49 (во всех задачах этого задания используются свойства параллелограмма).

Задание на дом: п. 53; вопросы 16—18 (с. 75); несколько задач из задания 50 (на усмотрение учителя).

Второй урок следует посвятить повторению теоретического материала, изученного на первом уроке, и решению задач из задания 49.

Задание на дом: оставшиеся задачи из задания 50.

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения п. 53 учащиеся должны проявить умение самостоятельно (возможно, с подсказкой учителя) находить эффективные способы доказательства рассматриваемых утверждений; уметь формулировать определение параллелограмма, доказывать, что параллелограмм — выпуклый четырёхугольник, доказывать теоремы о свойствах параллелограмма; решать задачи такого типа, как в задании 49.

Уроки 26, 27 Признаки параллелограмма

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: изучить признаки параллелограмма и использовать их при решении задач; продолжить формирование умения учащихся самостоятельно находить доказательства новых утверждений, опираясь на накопленные знания и опыт.

В учебнике доказаны три теоремы, каждая из которых выражает признак параллелограмма. Первый шаг в доказательствах первой и второй теорем одинаков: проводится та диагональ четырёхугольника, которая разделяет его на два треугольника. Учителю следует разъяснить учащимся, что в условиях теорем не сказано, что данный четырёхугольник выпуклый, и поэтому мы не можем использовать любую из двух диагоналей для разделения четырёхугольника на два треугольника, но даже в случае невыпуклого четырёхугольника одна такая диагональ найдётся. Дальнейший ход доказательства состоит в нахождении равных треугольников и использовании признака параллельности двух прямых, связанного с накрест лежащими углами. Поскольку доказательства первой и второй теорем сходны, то, рассказав доказательство первой теоремы, учитель может предложить учащимся самим доказать вторую теорему, а затем вызвать к доске кого-то из учеников для изложения доказательства.

На первом уроке можно решить некоторые задачи из задания 51 (на усмотрение учителя).

Задание на дом: п. 54, в том числе самостоятельное изучение по учебнику доказательства третьей теоремы о признаках параллелограмма; вопрос 19 (с. 75); несколько задач из задания 52 (на усмотрение учителя).

На втором уроке следует повторить первые две теоремы и попросить кого-то из учеников рассказать доказательство третьей теоремы. Остальную часть урока нужно отвести на решения задач из задания 51.

Задание на дом: п. 54; вопрос 19 (с. 75); задание 52 (оставшиеся задачи).

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения п. 54 учащиеся должны проявить (в большей мере, чем ранее) умение самостоятельно (или с помощью учителя) находить доказательства изучаемых утверждений, опираясь на накопленный багаж геометрических знаний; уметь доказывать теоремы о признаках параллелограмма; решать задачи такого типа, как в задании 51.

Урок 28 Признаки прямоугольника

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: обсудить два признака прямоугольника, свойство его диагоналей и решить задачи, в которых используются эти признаки и свойство.

Начиная урок, полезно напомнить учащимся, что прямоугольник в курсе геометрии появился ещё в 7 классе, где было доказано, что противоположные стороны прямоугольника равны. С другой стороны, совсем недавно мы познакомились с таким свойством параллелограмма: если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм. Из этого следует, что прямоугольник — параллелограмм. Но не любой параллелограмм является прямоугольником. В учебнике доказаны две теоремы, в каждой из которых говорится о том, каким свойством должен обладать параллелограмм, чтобы он оказался прямоугольником, т. е. каждая из теорем выражает определённый признак прямоугольника.

Первая теорема сформулирована так: если один из углов параллелограмма прямой, то этот параллелограмм — прямоугольник. Следует объяснить учащимся, что, согласно определению прямоугольника, нужно доказать, что и остальные углы параллелограмма будут прямыми. После этого можно предложить учащимся самостоятельно провести доказательство, используя свойства параллелограмма.

Доказательство второй теоремы (если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник) учащиеся могут изучить по учебнику, после чего целесообразно пригласить кого-то из них к доске для изложения доказательства.

Полезно также предложить им найти другой способ доказательства теоремы, используя тот факт, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Этот способ состоит в следующем. Из условия равенства диагоналей параллелограмма и того факта, что точкой пересечения диагонали делятся пополам, следует, что треугольники AOB, BOC, COD и DOA, образованные при пересечении диагоналей параллелограмма $ABCD$ в точке O (рис. 7), являются равнобедренными и попарно равными, поэтому углы A, B, C и D равны друг другу (это показано на рис. 7). Следовательно, каждый из этих углов равен 90°, т. е. параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником. Целесообразно записать это доказательство в тетрадях.

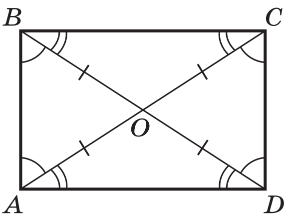


Рис. 7

Для второй теоремы справедливо обратное утверждение (свойство прямоугольника): диагонали прямоугольника равны. Желательно, чтобы и это утверждение учащиеся доказали самостоятельно.

В классе нужно решить задачи из задания 53.

Задание на дом: п. 55; вопросы 20, 21 (с. 75); задание 54.

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения п. 55 учащиеся должны проявить владение грамотной устной и письменной речью, умение самостоятельно находить доказательства; уметь доказывать теоремы о признаках прямоугольника и утверждение о равенстве его диагоналей; различать, в каком утверждении говорится о признаке прямоугольника, а в каком — о его свойстве; уметь решать задачи такого типа, как в задании 53.

Урок 29 Ромб

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: доказать утверждение о свойстве диагоналей ромба и две теоремы, выражающие признаки ромба; применить эти утверждения при решении задач.

Дав определение ромба, можно отметить, что на предыдущем уроке рассматривались такие параллелограммы, у которых все углы равны друг другу (т. е. прямоугольники), а теперь речь пойдёт о параллелограммах, у которых равны все стороны.

Утверждение о свойствах диагоналей ромба и две теоремы о признаках ромба доказываются несложно. Можно разделить учеников класса на три группы и поручить каждой группе найти доказательство одного из трёх утверждений, устроив тем самым своеобразное интеллектуальное соревнование: кто быстрее найдёт доказательство своего утверждения? Затем представитель каждой группы выходит к доске и рассказывает найденное доказательство.

В оставшееся время можно решить задачи из задания 55.

Задание на дом: п. 56; вопросы 22—24 (с. 75); задание 56.

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения п. 56 учащиеся должны проявить способность к коллективной творческой работе; уметь доказывать утверждение о свойствах диагоналей ромба и две теоремы о признаках ромба; решать задачи такого типа, как в задании 55.

Урок 30 Трапеция

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: дать определения трапеции, равнобедренной трапеции, прямоугольной трапеции; ввести названия сторон трапеции (основания, боковые стороны); решить несколько задач, связанных с трапецией.

После того как сформулировано определение трапеции, введены названия её сторон и даны определения равнобедренной и прямоугольной трапеции, следует приступить к решению задач из задания 57. Это задание содержит 12 задач, связанных с трапецией. Учитель может по своему усмотрению отобрать из них столько, сколько удастся решить за один урок. Полезно решить на уроке задачу 57 в), в которой требуется доказать два утверждения о свойствах равнобедренной трапеции. Можно отметить, что справедливы и обратные утверждения (признаки равнобедренной трапеции), их предстоит доказать при выполнении домашнего задания (задача 58 в)). Полезно решить в классе задачу 57 л) на построение. При её решении в качестве одной из базовых задач выступает задача о построении прямой, параллельной данной и проходящей от неё на расстоянии, равном длине данного отрезка. Решения задач 57 в), 57 л), 58 в) приведены на с. 80—83.

Задание на дом: п. 57; вопросы 25, 26 (с. 75); задание 58.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 57 учащиеся должны уметь формулировать определения трапеции, равнобедренной и прямоугольной трапеций, объяснять, какие стороны трапеции называются основаниями, а какие — боковыми сторонами; решать задачи такого типа, как в задании 57.

Урок 31 Симметрия

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятия, связанные с центральной и осевой симметрией; привести примеры фигур, обладающих центральной (осевой) симметрией; обратить внимание учащихся на симметрию в архитектуре, живописи, технике, природе.

В начале урока целесообразно разобрать решение задачи 58 в) из домашнего задания, отметив ещё раз, что два утверждения этой задачи выражают признаки равнобедренной трапеции и являются обратными к утверждениям задачи 57 в), где речь шла о свойствах равнобедренной трапеции.

Затем в соответствии с текстом учебника (п. 58) учителю следует ввести понятия, связанные с центральной и осевой симметрией, проиллюстрировать эти понятия, рассмотреть различные примеры фигур, обладающих центральной (осевой) симметрией (при этом нужно использовать рис. 68—72 из учебника или плакаты, выполненные по этим рисункам). Непременно нужно отметить, что параллелограмм, изучению свойств и признаков которого было уделено большое внимание, имеет центр симметрии, а два частных вида параллелограмма — прямоугольник и ромб — имеют ещё по две оси симметрии. Если же параллелограмм является одновременно прямоугольником и ромбом (т. е. квадратом), то у него четыре оси симметрии. Также нужно обратить внимание на то, что все правильные многоугольники обладают симметрией: любой правильный n-угольник имеет n осей симметрии, а если число n чётное, то центр правильного n-угольника является его центром симметрии.

В завершение рассказа о симметрии следует отметить и проиллюстрировать её важную роль в архитектуре, живописи, технике, широкое распространение в природе.

После этого можно решить некоторые задачи из задания 59.

Задание на дом: п. 58; вопросы 27—31 (с. 75, 76); задание 60.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 58 учащиеся должны уметь объяснить, какие две точки называются симметричными относительно данной точки, какая фигура называется симметричной относительно данной точки, что такое центр симметрии фигуры, какие две точки называются симметричными относительно данной прямой, какая фигура называется симметричной относительно данной прямой, что такое ось симметрии фигуры; приводить примеры фигур, обладающих центральной симметрией, осевой симметрией, центральной и осевой симметрией, а также примеры, связанные с симметрией в архитектуре, технике, природе; решать задачи такого типа, как в задании 59.

Урок 32 Решение задач

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: решать задачи по теме «Параллелограмм и трапеция», провести самостоятельную работу № 4.

В первой половине урока можно решить некоторые из задач к § 14 и дополнительных задач к § 14 (задачи 88—122), которые не были решены ранее.

Во второй половине урока нужно провести самостоятельную работу № 4.

Задание на дом: несколько (на усмотрение учителя) дополнительных задач к § 14 (задачи 88—122).

Урок 33 Средняя линия треугольника

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: дать определение средней линии треугольника; доказать теорему о средней линии треугольника и её следствие и использовать их при решении задач.

После того как дано определение средней линии треугольника и доказана теорема о средней линии треугольника (это следует сделать учителю самому), нужно сформулировать следствие из неё: прямая, проходящая через середину стороны треугольника параллельно другой его стороне, делит третью сторону пополам.

Доказательство этого утверждения можно провести в форме вопросов со стороны учителя и ответов учащихся. Учитель рисует на доске треугольник ABC, отмечает середину M стороны AB (рис. 8, *а*) и задаёт вопрос: сколько прямых можно провести через точку M параллельно стороне AC? Ответ: только одну. Вопрос: откуда следует, что только одну? Ответ: из основной теоремы о параллельных прямых.

Проведя отрезок MN параллельно стороне AC (рис. 8, *б*), учитель задаёт следующий вопрос: является ли отрезок MN средней линией треугольника ABC? Ответ: да. Вопрос: откуда это следует? Ответ: так как средняя линия, соединяющая середины сторон AB и BC, параллельна AC (это доказано в теореме о средней линии треугольника), то прямая, содержащая эту среднюю линию, совпадает с прямой MN. Следовательно, отрезок MN — средняя линия треугольника и точка N — середина стороны BC (рис. 8, *в*), что и требовалось доказать.

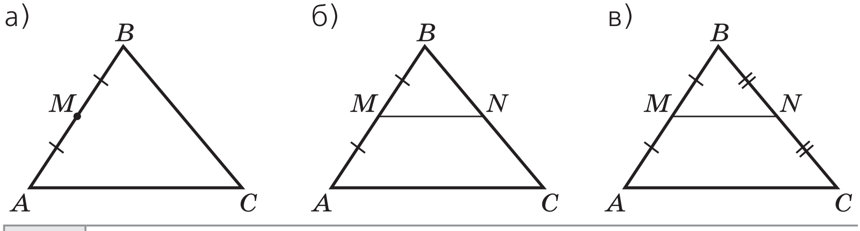


Рис. 8

Далее нужно решить несколько задач (сколько позволит время) из задания 61. Желательно при этом разобрать задачи 61 д) и 61 ж). К задаче 61 д) в учебнике дан рисунок 85, на котором изображён выпуклый четырёхугольник $ABCD$ и отмечены середины его сторон — точки P, Q, R и T. Нужно доказать, что четырёхугольник $PQRT$ — параллелограмм. Учителю следует отметить, что это утверждение верно и тогда, когда четырёхугольник $ABCD$ невыпуклый (доказательство для невыпуклого четырёхугольника учащиеся должны провести при выполнении домашнего задания, задача 62 д)), и что это утверждение часто называют теоремой Вариньона в честь французского математика и механика Пьера Вариньона (1654—1722). Оставшиеся задачи из задания 61 можно будет решить на уроках 35, 38, 39.

Решения задач 61 д) и 61 ж) приведены на с. 84, 85.

Задание на дом: п. 59; вопросы 32, 33 (с. 76); задание 62 (задачи, отмеченные теми же буквами, что и решённые в классе из задания 61).

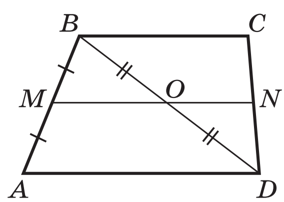
Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 59 учащиеся должны уметь формулировать определение средней линии треугольника, формулировать и доказывать теорему о средней линии треугольника и следствие из неё, демонстрируя тем самым владение грамотной устной речью; уметь решать задачи такого типа, как в задании 61.

Урок 34 Средняя линия трапеции

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: дать определение средней линии трапеции; доказать теорему о средней линии трапеции; применить эту теорему при решении задач.

По ходу изложения доказательства теоремы о средней линии трапеции учителю целесообразно задавать вопросы учащимся. Проведя через точку M прямую, параллельную основанию трапеции (рис. 9), можно поставить вопрос: откуда следует, что точка O пересечения этой прямой с отрезком BD является серединой этого отрезка? Ответ: из след-



$MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$

Рис. 9

ствия из теоремы о средней линии треугольника, применённого к треугольнику ABD. Следующий вопрос: откуда следует, что точка N — середина стороны CD? Ответ: из того же следствия, применённого к треугольнику BCD.

После доказательства теоремы нужно отметить, что попутно мы доказали ещё одно утверждение, аналогичное следствию из теоремы о средней линии треугольника, и можно предложить учащимся самим сформулировать это утверждение по аналогии с упомянутым следствием.

Затем нужно приступить к решению задач из задания 63. Оставшиеся неразобранными задачи из этого задания можно будет решить на уроках 35, 38, 39.

> Задание на дом: п. 60; вопросы 34, 35 (с. 76); задание 64 (задачи, отмеченные теми же буквами, что и разобранные в классе из задания 63).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 60 учащиеся должны уметь формулировать определение средней линии трапеции, формулировать и доказывать теорему о средней линии трапеции и следствие из неё; уметь решать задачи такого типа, как в задании 63.

Урок 35 Теорема Фалеса

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: доказать теорему Фалеса; продолжить формирование умения учащихся самостоятельно работать с текстом учебника; решить задачу о разделении данного отрезка на n равных частей с помощью циркуля и линейки.

Целесообразно поручить учащимся самим прочитать формулировку и доказательство теоремы Фалеса в учебнике, а затем попросить кого-то воспроизвести доказательство у доски.

Затем нужно решить задачу о разделении данного отрезка на n равных частей с помощью циркуля и линейки.

В оставшееся время можно решить какие-то из нерешённых задач из заданий 61 и 63 (на усмотрение учителя).

> Задание на дом: п. 61; вопросы 36, 37 (с. 76); задачи из заданий 62 и 64, отмеченные теми же буквами, что и разобранные на уроке задачи из заданий 61 и 63.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 61 учащиеся должны уметь чётко формулировать и доказывать теорему Фалеса; уметь объяснить, как с помощью циркуля и линейки разделить данный отрезок на n равных частей.

Урок 36 Теорема о пересечении медиан треугольника

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: доказать теорему о пересечении медиан треугольника; провести самостоятельную работу № 5.

Начиная урок, можно напомнить учащимся, что вопрос о пересечении медиан треугольника в одной точке был поставлен ещё в 7 классе. Теперь мы получим обоснованный ответ на этот вопрос.

Доказательство теоремы о пересечении медиан треугольника целесообразно учителю рассказать самому.

Во второй половине урока нужно провести самостоятельную работу № 5.

> Задание на дом: п. 62; вопрос 38 (с. 76); оставшиеся неразобранными задачи из заданий 62 и 64, а также задача 66 а).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 62 учащиеся должны уметь формулировать и доказывать теорему о пересечении медиан треугольника.

Урок 37 Теорема о пересечении высот треугольника

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: доказать теорему о пересечении высот треугольника и использовать её при решении задач.

Урок можно начать с повторения теоремы о пересечении медиан треугольника и решения задачи 65 а), где используется эта теорема. После этого нужно сформулировать и доказать теорему о пересечении высот треугольника (это следует сделать самому учителю), ввести название «ортоцентр» для точки пересечения высот (или их продолжений) и отметить, что с каждым треугольником связаны четыре замечательные точки — точка пересечения биссектрис (она является центром вписанной окружности), точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам (она является центром описанной окружности), точка пересечения медиан треугольника и ортоцентр. В равностороннем треугольнике все четыре замечательные точки совпадают.

Затем можно решить задачи 65 б), 65 в), 65 г).

Задание на дом: п. 63; вопросы 39, 40 (с. 76); задачи 66 б), 66 в), 66 г). Для наиболее подготовленных учащихся также пп. 64, 65. В этих пунктах доказаны утверждения о геометрических фигурах, связанных с любым треугольником, — о прямой Эйлера и об окружности Эйлера. Изучение этих утверждений не является обязательным для всех учащихся, но представляет несомненный интерес для увлекающихся геометрией.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 63 учащиеся должны уметь формулировать и доказывать теорему о пересечении высот треугольника; уметь объяснить, какие точки называются замечательными точками треугольника; уметь решать задачи такого типа, как в задании 65.

Уроки 38, 39 Решение задач по теме «Многоугольники»

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: решать различные задачи по теме «Многоугольники»; подготовиться к контрольной работе.

На уроках нужно разобрать оставшиеся нерешёнными задачи из заданий 61 и 63, а также ряд задач (на усмотрение учителя) из числа дополнительных к § 13, 14, 15 (задачи 67—130). В процессе решения задач следует повторить теоретический материал главы 5. На втором уроке нужно провести математический диктант № 2.

В классах с высоким уровнем математической подготовки учащихся можно провести также самостоятельную работу № 6.

Задание на дом: задачи из числа дополнительных к § 13, 14, 15 (на усмотрение учителя).

Урок 40 Контрольная работа № 2

Ответы и указания

Вар. 1. **2.** Указание. Доказать, что $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$. **3.** $\angle A = 89°$, $\angle B = 84°$, $\angle C = 91°$ и $\angle D = 96°$. **4.** 8 см и 16 см.

Вар. 2. **2.** Указание. Доказать, что соответственные углы, образованные при пересечении прямых AD и BC секущей AB, равны. **3.** $\angle A = 60°$, $\angle B = 120°$, $\angle C = 110°$ и $\angle D = 70°$. **4.** 4 см.

Вар. 3. **1.** Указание. Если две вершины правильного многоугольника симметричны относительно некоторой прямой, то эта прямая проходит через его центр. **2.** Указание. Отметим на большем основании AD трапеции $ABCD$ точку E так, что $AE = BC$. Тогда $\angle BAD = \angle BCE < \angle BCD$. Аналогично $\angle CDA < \angle ABC$. **3.** 30°. **4.** Указание. Соответственные стороны треугольников BCP и DAQ являются средними линиями треугольников, параллельными их общим сторонам.

Вар. 4. **1.** Указание. Вершины A_k и A_{n+k} правильного $2n$-угольника $A_1 \dots A_{2n}$ симметричны относительно его центра. **2.** Указание. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Предположим, что $BD \geqslant AC$. Тогда $BO \geqslant AO$ и $OD \geqslant AO$, поэтому $\angle BAO \geqslant \angle ABO$ и $\angle OAD \geqslant \angle ADO$. **3.** $2a$. **4.** Указание. Если четырёхугольник отличен от параллелограмма и трапеции, то точки P и Q не совпадают и не лежат на одной прямой с точками A и C. Отрезки AP и CQ (а также отрезки AQ и CP) являются средними линиями треугольников с общей стороной.

Задание на дом: п. 66.

Урок 41 Пропорциональные отрезки

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: напомнить учащимся процедуру (алгоритм) измерения отрезков при выбранной единице измерения; ввести понятие отношения двух отрезков и доказать, что отношение двух отрезков равно отношению их длин при любой единице измерения; ввести понятие пропорциональных отрезков и решить несколько задач, связанных с отношением и пропорциональностью отрезков.

На первом уроке, опираясь на текст учебника (п. 66), учителю следует рассказать о процедуре (алгоритме) измерения данного отрезка с помощью выбранной единицы измерения отрезков. Необходимо подчеркнуть, что за единицу измерения можно принять любой отрезок, а описанная процедура даёт для данного измеряемого отрезка положительное число, которое показывает, сколько раз выбранная единица измерения и её части (десятая, сотая и т. д.) укладываются в этом отрезке. Иными словами, при выбранной единице измерения длина данного отрезка выражается положительным числом, полученным в результате описанной процедуры.

Далее нужно объяснить, что называется отношением одного отрезка к другому. Учителю следует иметь в виду, что иногда отношение двух отрезков вводят как отношение их длин. Разумеется, это возможно, но при таком определении для нахождения отношения двух отрезков нужно сначала измерить каждый из них с помощью какой-то единицы измерения, а затем разделить длину одного отрезка на длину другого. Тем самым отношение двух отрезков определяется путём привлечения ещё одного отрезка (своего рода посредника) — единицы измерения.

В нашем определении отношения двух отрезков никакого посредника нет. Отношением отрезка AB к отрезку CD называется число, которое выражает длину отрезка AB, если за единицу измерения взят отрезок CD.

Тот факт, что определённое таким образом отношение отрезков равно отношению их длин при любой единице измерения, требует обоснования, и учителю следует его провести, опираясь на текст учебника.

Затем нужно ввести понятие пропорциональных отрезков и перейти к решению задач. В классе решаются задачи из задания 131. Решение задачи 131 е) приведено на с. 99.

> Задание на дом: п. 66; вопросы 1, 2 (с. 119); задачи из задания 132.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 66 учащиеся должны уметь рассказать о процедуре измерения отрезков с помощью выбранной единицы измерения отрезков и формулировать вывод: при выбранной единице измерения длина каждого отрезка выражается положительным числом; уметь объяснить, что называется отношением одного отрезка к другому, и доказывать, что отношение отрезков равно отношению их длин при любой единице измерения; формулировать определение пропорциональных отрезков и решать задачи такого типа, как в задании 131.

Уроки 42, 43 Косинус острого угла. Синус острого угла

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: ввести понятия косинуса и синуса острого угла прямоугольного треугольника, доказать утверждение: если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то косинусы этих углов равны, и аналогичное утверждение для синусов; вывести формулы приведения и основное тригонометрическое тождество.

Начиная урок, учитель может сказать, что мы приступаем к разработке тригонометрического аппарата геометрии, основу которого составляют тригонометрические функции — синус угла, косинус угла, тангенс угла и котангенс угла. На этом и следующем уроках будут определены косинус и синус острого угла, установлены формулы, связывающие эти функции, а затем мы определим тригонометрические функции для любых углов от $0°$ до $180°$. Названия этих функций происходят от латинских слов — об этом говорится на слайдах в учебнике, а слово «тригонометрия» в переводе с греческого означает «измерение треугольников». Тригонометрические функции дают возможность получить важные формулы, связывающие между собой стороны и углы треугольника. Эти формулы широко используются как в самой геометрии, так и в её приложениях.

Затем, используя рисунок 89 учебника (или такой же рисунок на доске), нужно дать определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника и ввести обозначение $\cos A$.

После этого следует сформулировать и доказать утверждение: если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то косинусы этих углов равны.

Доказательство опирается на определение отношения двух отрезков и утверждение из замечания п. 42. Поэтому учителю следует напомнить учащимся, в чём состоит это утверждение.

Завершив изложение доказательства, нужно сделать вывод: теперь мы можем говорить «косинус острого угла», не уточняя при этом, об остром угле какого именно прямоугольного треугольника идёт речь. Следует также отметить, что косинус острого угла меньше единицы, поскольку катет меньше гипотенузы.

После этого целесообразно на первом же уроке дать определение синуса острого угла прямоугольного треугольника, ввести обозначение $\sin A$ и вывести формулы приведения:

$$\sin A = \cos(90° - A),$$
$$\cos A = \sin(90° - A).$$

Далее нужно сформулировать утверждение: если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны. Полезно предложить учащимся самим доказать это утверждение, используя формулы приведения. При недостатке времени на уроке нужно включить в домашнее задание это доказательство, а также изучение по учебнику основного тригонометрического тождества. При наличии времени в классе можно решить задачу 133 а).

Задание на дом: пп. 67, 68; вопросы 3—6 (с. 119); задача 134 а).

На втором уроке следует повторить материал, изученный на первом уроке (это можно сделать в форме фронтального опроса); доказать утверждения о равенстве синусов равных острых углов двух прямоугольных треугольников и вывести основное тригонометрическое тождество (для этого целесообразно вызвать кого-то из учеников к доске); решить задачи 133 б), 133 в), 133 г). В связи с задачами 133 б) и 134 б) нужно требовать от учащихся, чтобы они твёрдо знали, чему равны значения синуса и косинуса для углов в 30°, 45° и 60°.

Задание на дом: пп. 67, 68; вопросы 3—6 (с. 119); задачи 134 б), 134 в), 134 г).

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения пп. 67, 68 учащиеся должны уметь формулировать определения косинуса и синуса острого угла прямоугольного треугольника; доказывать утверждения о равенстве косинусов и равенстве синусов равных острых углов прямоугольных треугольников; выводить формулы приведения и основное тригонометрическое тождество, проявив при этом умение работать с текстом учебника; решать задачи такого типа, как 133 а), 133 б), 133 в), 133 г); знать значения синуса и косинуса для углов в 30°, 45° и 60°.

Урок 44 Среднее геометрическое и среднее арифметическое двух отрезков

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятия среднего геометрического и среднего арифметического двух отрезков; доказать, что высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, является средним геометрическим отрезков, на которые она разделяет гипотенузу; решить задачу о построении (с помощью циркуля и линейки) среднего геометрического двух данных отрезков и доказать, что среднее арифметическое двух неравных отрезков больше их среднего геометрического.

Выполнив поставленные задачи (в целях экономии времени учитель может сам изложить теоретический материал п. 69), нужно приступить к решению задач из задания 133 и разобрать задачи 133 д), 133 е), 133 ж), 133 з), 133 и). Учителю следует иметь в виду, что все эти задачи можно решить без использования теоремы Пифагора (она появится в следующем пункте учебника), а опираясь только на уже изученный материал. Решения некоторых из этих задач приведены на с. 99, 100.

Задание на дом: п. 69; вопросы 7, 8 (с. 119); задачи 134 д), 134 е), 134 ж), 134 з), 134 и).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 69 учащиеся должны уметь объяснить, какой отрезок называется средним геометрическим и какой — средним арифметическим двух данных отрезков; доказывать, что высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, является средним геометрическим отрезков, на которые она разделяет гипотенузу; уметь строить среднее геометрическое двух данных отрезков и доказывать, что среднее арифметическое двух неравных отрезков больше их среднего геометрического; решать задачи такого типа, как 133 д), 133 е), 133 ж), 133 з), 133 и).

Уроки 45, 46 Теорема Пифагора

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: доказать теорему Пифагора и обратную ей, решать задачи на применение этих теорем.

Сформулировав теорему Пифагора, учитель может предложить учащимся самим её доказать, сделав подсказку: нужно выразить каждый катет через гипотенузу и один из острых углов.

Затем можно поставить перед учащимися вопрос: как сформулировать обратное утверждение по отношению к теореме Пифагора и верно ли оно? Обсудив формулировку и проведя доказательство обратной теоремы, нужно приступить к решению задач. В классе можно решить задачи 135 а), 135 б).

Задание на дом: п. 70; вопросы 9, 10 (с. 119); задачи 136 а), 136 б).

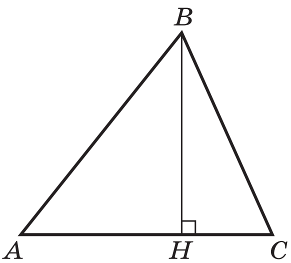


Рис. 10

На втором уроке нужно повторить пройденное на первом уроке. Затем учитель может рассказать, опираясь на текст учебника, о египетском и пифагоровых треугольниках, а далее следует решить задачи 135 в), 135 г), 135 д). Особое внимание следует уделить задаче 135 д). После того как для остроугольного треугольника ABC (рис. 10) получено искомое равенство

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$$

(решение этой задачи приведено на с. 101), полезно отметить, что $AH = AB \cdot \cos A$, и поэтому полученное равенство можно записать в виде

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Учитель может сказать, что это равенство называется теоремой косинусов и оно верно не только тогда, когда угол A острый, но и тогда, когда угол A прямой или тупой, но чтобы это доказать, понадобится предварительно дать определение косинуса прямого угла и косинуса тупого угла, что и будет сделано очень скоро.

Задание на дом: п. 70; вопросы 9—12 (с. 119); задачи 136 в), 136 г), 136 д).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 70 учащиеся должны уметь формулировать и доказывать теорему Пифагора и обратную ей; знать, какие треугольники называются египетскими и пифагоровыми; решать задачи такого типа, как 135 а), 135 б), 135 в), 135 г), 135 д).

Урок 47 Золотое сечение

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: познакомить учащихся с понятием золотого сечения и его использованием в архитектуре, живописи, скульптурных композициях; решить задачу о построении (с помощью циркуля и линейки) золотого сечения данного отрезка.

О золотом сечении и его использовании в архитектуре и искусстве, а также о построении золотого сечения данного отрезка учителю следует рассказать в форме небольшой лекции. Желательно сопровождать рассказ специально подобранными иллюстрациями.

После этого можно решить задачу 135 е), а также некоторые задачи (на усмотрение учителя) из числа дополнительных к § 16 (задачи 149—157).

Задание на дом: п. 71; вопросы 13—15 (с. 119); задача 136 е) и несколько задач из числа дополнительных к § 16 (на усмотрение учителя). Целесообразно предложить учащимся, проявляющим интерес к приложениям геометрии, подготовить реферат на тему «Золотое сечение в природе, архитектуре и живописи» (материал для реферата учащиеся могут найти в том числе и в Интернете).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 71 учащиеся должны уметь объяснить, что такое золотое сечение, как его построить с помощью циркуля и линейки; приводить примеры использования золотого сечения в архитектуре и искусстве.

Урок 48 Решение задач

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: решать задачи по теме «Косинус и синус острого угла», провести самостоятельную работу № 7.

В начале урока можно решить одну-две задачи из числа дополнительных к § 16 (задачи 149—157), а затем нужно провести самостоятельную работу № 7.

Задание на дом: оставшиеся задачи из числа дополнительных к § 16.

Уроки 49, 50 Синус и косинус углов от 90° до 180°

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: для углов α из промежутка $0° < \alpha < 90°$ доказать справедливость равенств

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1; \qquad (1)$$

с помощью формул (1) определить синус и косинус угла α из промежутка $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$; вывести формулы приведения

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha; \qquad (2)$$

доказать справедливость основного тригонометрического тождества для углов от 90° до 180°; ввести ещё две тригонометрические функции — тангенс угла и котангенс угла.

Первый урок нужно начать с замечания о том, что синус и косинус угла определены пока только для углов α из промежутка $0° < \alpha < 90°$. Теперь нам предстоит определить их для углов от 90° до 180°. Чтобы сделать это, понадобятся формулы (1). Доказательство справедливости этих формул для любого угла α из промежутка $0° < \alpha < 90°$ учителю целесообразно провести самому, опираясь на текст учебника и рисунок на доске, повторяющий рисунок 99 учебника. После этого следует отметить, что если $90° \leqslant \alpha < 180°$, то $45° \leqslant \frac{\alpha}{2} < 90°$ и, следовательно, для каждого угла α из указанного промежутка правые части в формулах (1) принимают определённые числовые значения. Эти числовые значения (эти числа) мы и называем (по определению) значениями синуса и косинуса для данного угла α из промежутка $90° \leqslant \alpha < 180°$.

Используя формулы (1), нужно сначала найти значения $\sin 90°$ и $\cos 90°$, а затем $\sin 180°$ и $\cos 180°$.

Далее, опираясь на формулы приведения из п. 68, следует вывести ещё две формулы приведения — формулы (2) и с их помощью решить задачу 137 а). Необходимо, чтобы учащиеся твёрдо усвоили, что синус острого, прямого и тупого углов положителен, развёрнутого угла — равен нулю; косинус острого угла положителен, прямого угла — равен нулю, а тупого и развёрнутого углов — отрицателен.

При наличии времени в классе можно решить задачу 137 б).

Задание на дом: п. 72 (до вывода основного тригонометрического тождества); вопросы 16, 17 (с. 119); задачи 138 а), 138 б).

На втором уроке нужно доказать справедливость основного тригонометрического тождества для углов α из промежутка $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Для углов в $90°$ и $180°$ это делается непосредственной проверкой, а для остальных углов из указанного промежутка — с помощью формул приведения (2). Другой способ доказательства связан с формулами (1). Приведём это доказательство.

Если $90° \leqslant \alpha < 180°$, то $45° \leqslant \frac{\alpha}{2} < 90°$, поэтому $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ и вторую из формул (1) можно записать в виде $\cos\alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. Используя эту, а также первую из формул (1), получаем:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 =$$

$$= \sin^4 \frac{\alpha}{2} + 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^4 \frac{\alpha}{2} = \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1.$$

Далее нужно определить $\sin 0°$ и $\cos 0°$ и ввести ещё две тригонометрические функции: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. После этого целесообразно решить задачи 137 в) и 137 г). Необходимо добиться того, чтобы учащиеся твёрдо знали значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов в $30°$, $45°$, $60°$, $120°$, $135°$, $150°$ и также знали, что:

• тангенс острого угла положителен, тангенс тупого угла отрицателен, $\operatorname{tg} 0° = \operatorname{tg} 180° = 0$, тангенс прямого угла не определён;

• котангенс острого угла положителен, прямого угла — равен нулю, тупого угла — отрицателен, а для $\alpha = 0°$ и $\alpha = 180°$ котангенс не определён.

При наличии времени можно решить ещё задачу 137 д).

Задание на дом: п. 72; вопросы 18, 19 (с. 120); задачи 138 в), 138 г), 138 д).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 72 учащиеся должны уметь доказывать справедливость формул (1) и объяснять, как с помощью этих формул определяются синус и косинус для углов от $90°$ до $180°$; уметь выводить формулы приведения (2) и доказывать основное тригонометрическое тождество для углов от $90°$ до $180°$; давать определения тангенса угла и котангенса угла; знать значения тригонометрических функций для углов в $30°$, $45°$, $60°$, $120°$, $135°$ и $150°$.

Урок 51 Теорема синусов

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: доказать теорему, дающую выражение стороны треугольника через диаметр описанной окружности и синус противолежащего угла, а затем на её основе доказать теорему синусов.

Доказательство первой теоремы учителю целесообразно рассказать самому, опираясь на текст учебника и рисунки на доске, повторяющие рисунок 100 учебника. По ходу объяснения полезно задавать учащимся вопросы. Например: почему углы D и A на рисунке 100, *б* равны? Ответ: потому что это вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC. Другой вопрос: чему равна сумма углов A и D на рисунке 100, *в*? Ответ: $\angle A + \angle D = 180°$, так как эти углы являются противоположными углами вписанного четырёхугольника $ABCD$.

После доказательства теоремы нужно сформулировать её следствие — теорему синусов (доказательство можно провести устно), а затем решить некоторые из задач 137 е), 137 ж), 137 з), 137 и), 137 к) (на усмотрение учителя).

Задание на дом: п. 73; вопросы 20, 21 (с. 120); задачи 138 е), 138 ж), 138 з), 138 и), 138 к).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 73 учащиеся должны уметь формулировать и доказывать теорему, дающую выражение стороны треугольника через диаметр описанной окружности и синус противолежащего угла, и, как следствие из этой теоремы, теорему синусов; уметь решать задачи такого типа, как 137 е), 137 ж), 137 з), 137 и), 137 к), используя теорему синусов.

Уроки 52, 53 Теорема косинусов

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: доказать теорему косинусов и вывести два следствия из неё: 1) если косинусы двух углов равны, то равны и сами углы; 2) если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник — прямоугольный (теорема, обратная теореме Пифагора); провести самостоятельную работу № 8.

На первом уроке, сформулировав теорему косинусов и записав искомое равенство в виде $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, учитель может напомнить учащимся, что для случая остроугольного треугольника это равенство было уже получено на одном из предыдущих уроков при решении задачи 135 д). Теперь справедливость этого равенства будет доказана для любого треугольника.

Воспроизведя на доске рисунок 101 учебника, целесообразно написать два равенства:

$$BH = c\sin A,\ \ CH = b - c\cos A$$

и предложить учащимся доказать их справедливость последовательно для случаев, когда угол A острый (рис. 101, *а*), прямой (рис. 101, *б*), тупой (рис. 101, *в*). Можно провести это доказательство путём коллективного обсуждения. После этого нужно предложить воспользоваться теоремой Пифагора применительно к прямоугольному треугольнику BCH и первого из учеников, получивших искомое равенство, попросить рассказать своё решение у доски.

Затем следует решить задачи 139 а), 139 б).

Изучение доказательства первого следствия из теоремы косинусов (если косинусы двух углов равны, то равны и сами углы) не является обязательным, но само утверждение должны усвоить все. Проявляющим интерес к математике можно дать задание (на дом) изучить доказательство по учебнику. Можно также отметить, что для синусов аналогичное утверждение неверно, т. е. из того, что синусы двух углов равны, не следует, что равны и сами углы. Например, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ и $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, но при этом углы не равны ($30^\circ \neq 150^\circ$).

Задание на дом: п. 74; вопросы 22, 23 (с. 120), но вопрос 23 только для учащихся с хорошей математической подготовкой; задачи 140 а), 140 б).

На втором уроке нужно вывести ещё одно следствие из теоремы косинусов, которое представляет собой теорему, обратную теореме Пифагора. Эта теорема уже была доказана в п. 70. Теперь появилась возможность дать другое доказательство теоремы. Желательно, чтобы учащиеся сами провели это доказательство, возможно, с подсказкой учителя (нужно использовать данное по условию равенство, а также равенство, которое установлено в теореме косинусов).

Во второй половине урока нужно провести самостоятельную работу № 8.

Задание на дом: п. 74; вопросы 22—24 (с. 120); несколько задач (на усмотрение учителя) из числа дополнительных к § 17 (задачи 158—182).

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения п. 74 учащиеся должны уметь формулировать теорему косинусов и два следствия из неё, доказывать теорему косинусов и с её помощью теорему, обратную теореме Пифагора; уметь решать задачи такого типа, как в задании 139, используя теорему косинусов и теорему, обратную теореме Пифагора; проявить умение участвовать в коллективном творческом процессе.

Уроки 54, 55 Решение треугольников

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: объяснить учащимся, что означают слова «решение треугольника» и как с помощью теорем синусов и косинусов решить треугольник, если даны: две стороны треугольника и угол между ними; сторона и два прилежащих к ней угла; три стороны треугольника; рассмотреть конкретные задачи на решение треугольника; доказать теорему о биссектрисе угла.

Учащиеся должны твёрдо усвоить, что элементами треугольника мы называем его стороны и углы, а слова «решить треугольник» означают, что по трём данным элементам, определяющим треугольник, нужно найти остальные три элемента. Если заданы две стороны треугольника и угол между ними, то любые два треугольника с этими заданными элементами равны друг другу, и так же обстоит дело, если задана сторона треугольника и два прилежащих к ней угла или если заданы три стороны треугольника. Можно сказать, что в каждом из этих случаев три заданных элемента однозначно определяют треугольник.

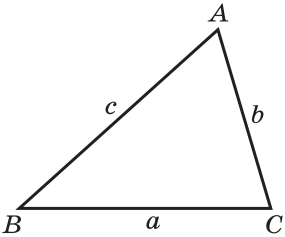


Рис. 11

Далее следует обсудить, как в каждом из указанных случаев можно решить треугольник с помощью теорем синусов и косинусов. Полезно изобразить треугольник ABC (на доске и в тетрадях учащихся), обозначить длины его сторон буквами a, b и c (рис. 11) и записать решения трёх задач.

Задача 1

Дано: b, c, $\angle A$.

Найти: a, $\angle B$, $\angle C$.

Решение. 1) По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, откуда находим a.

2) По теореме косинусов $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$, откуда находим $\cos B$, а по значению $\cos B$ находим сам угол B.

3) $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$.

Итак, все три искомых элемента найдены.

Целесообразно обсудить другой возможный способ нахождения угла B на втором шаге решения. По теореме синусов $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A}$, откуда находим $\sin B$. Но здесь может возникнуть трудность, связанная с тем, что если $\sin B \neq 1$, то существуют два угла (обозначим их B_1 и B_2), для которых $\sin B_1$ и $\sin B_2$ равны найденному значению $\sin B$. Эти углы связаны равенством $\angle B_2 = 180° - \angle B_1$, откуда следует, что один из этих углов острый, а другой тупой. Какой же из этих двух углов нужно взять в качестве угла B? Иногда на этот вопрос ответить просто, например если данный угол A прямой или тупой. Ясно, что в этом случае угол B острый. В противном случае с выбором угла B могут возникнуть затруднения. Чтобы их избежать, лучше пользоваться первым способом нахождения угла B, т. е. с помощью теоремы косинусов. Указанной трудности здесь не возникает в силу того, что если косинусы двух углов равны, то равны и сами углы.

Задача 2

Дано: a, $\angle B$, $\angle C$.

Найти: b, c, $\angle A$.

Решение. 1) $\angle A = 180° - \angle B - \angle C$.

2) По теореме синусов $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A}$, откуда находим b.

3) По теореме синусов $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A}$, откуда находим c.

Итак, все три искомых элемента найдены.

Задача 3

Дано: a, b, c.

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Решение. 1) По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, откуда находим $\cos A$, а по $\cos A$ находим сам угол A.

2) Аналогично находим угол B.
3) $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$.
Итак, все три искомых элемента найдены.

Описанные решения трёх задач полезно получить в результате коллективного обсуждения.

Далее на первом уроке следует решить задачи 141 а), 141 б), 141 в).

> Задание на дом: п. 75 (до теоремы о биссектрисе треугольника); вопрос 25 (с. 120); задачи 142 а), 142 б), 142 в).

На втором уроке нужно доказать теорему о биссектрисе треугольника и решить задачи 141 г), 141 д), 141 е), 141 ж), 141 з). Решения некоторых из этих задач приведены на с. 105, 106. Особое внимание следует уделить задаче 141 е), в которой рассматривается свойство биссектрисы внешнего угла треугольника, аналогичное свойству биссектрисы треугольника.

> Задание на дом: п. 75; вопрос 26 (с. 120); задачи 142 г), 142 д), 142 е), 142 ж), 142 з). Для наиболее подготовленных учащихся также пп. 76, 77.

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения п. 75 учащиеся должны уметь объяснить, что значит решить треугольник и как решаются разобранные выше задачи 1—3; уметь формулировать и доказывать теорему о биссектрисе треугольника; решать задачи такого типа, как в задании 141, используя теоремы синусов, косинусов и другие изученные утверждения, выстраивая план (схему) решения многошаговых задач и находя наиболее эффективные способы решения задач; проявить умение участвовать в коллективном творческом процессе.

Урок 56 Свойство углов подобных треугольников

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятие подобных треугольников, коэффициента их подобия; доказать теорему об углах подобных треугольников.

Урок можно начать с рассмотрения примеров предметов, имеющих одинаковую форму, но разные размеры. Можно предложить учащимся назвать такие примеры (например, большой и маленький мячи, две фотографии одного и того же предмета, сделанные с разным увеличением, две карты местности в разных масштабах и т. д.).

Затем следует дать определение подобных треугольников, записать равенство отношений их сторон, ввести понятие коэффициента подобия и обозначение подобия двух треугольников. Можно отметить, что равенство треугольников является частным случаем их подобия, когда коэффициент подобия равен 1.

Учителю следует иметь в виду, что сформулированное в учебнике определение подобных треугольников отличается от определений в некоторых других учебниках, например в учебнике «Геометрия 7—9» Л. С. Атанасяна и др. В данном учебнике в определении подобных треугольников используется только пропорциональность сторон одного треугольника сторонам другого треугольника и никак не задействованы углы треугольников. Тем самым введённое определение подобных треугольников в большей мере соответствует общему понятию подобных фигур. Что касается равенства углов подобных треугольников, то оно не следует теперь из определения (как в учебнике Л. С. Атанасяна и др.), а требует обоснования, что и сделано в виде теоремы об углах подобных треугольников.

Её доказательство учителю нужно изложить самому, отметив по ходу доказательства, что в нём дважды используется теорема косинусов и её важное следствие: если косинусы двух углов равны, то равны и сами углы.

Затем нужно решить задачи 143 а), 143 б), 143 в), 143 г). Решения задач 143 в) и 143 г) приведены на с. 106, 107.

Для упрощения записи решений задач целесообразно ввести термин <u>«сходственные стороны подобных треугольников»</u> — это такие две стороны, которые лежат против равных углов в подобных треугольниках.

Задание на дом: п. 78; вопросы 29, 30 (с. 120); задание 144.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 78 учащиеся должны <u>уметь</u> формулировать определение подобных треугольников, объяснять, что такое коэффициент их подобия и как обозначается подобие треугольников; доказывать теорему об углах подобных треугольников; решать задачи такого типа, как в задании 143, опираясь на определение подобных треугольников и теорему об углах подобных треугольников.

Уроки 57, 58 Признаки подобия треугольников

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: доказать две теоремы, выражающие первый и второй признаки подобия треугольников, и использовать их при решении задач.

На первом уроке желательно доказать обе теоремы. Доказательства достаточно простые, поэтому можно разделить класс на две группы и поручить одной группе изучить по учебнику доказательство первой теоремы, а другой — доказательство второй теоремы, а затем вызвать к доске по одному представителю от каждой группы для изложения доказательства.

Учителю следует обратить внимание учащихся на соответствие (аналогию) между первым признаком подобия треугольников и первым признаком равенства треугольников. Если к условию теоремы о первом признаке подобия треугольников

$$A_1B_1 = kAB, \quad B_1C_1 = kBC, \quad \angle B_1 = \angle B$$

добавить условие $k = 1$, то получится теорема, выражающая первый признак равенства треугольников.

И также второй признак подобия треугольников соответствует второму признаку их равенства — если к условию теоремы о втором признаке подобия треугольников

$$\angle A_1 = \angle A, \quad \angle B_1 = \angle B$$

добавить условие $\frac{A_1B_1}{AB} = 1$, т. е. $A_1B_1 = AB$, то получится теорема, выражающая второй признак равенства треугольников.

Далее, насколько позволит оставшееся время урока, нужно решать по порядку задачи из задания 145.

Задание на дом: п. 79; вопросы 31, 32 (с. 120); задачи из задания 146, отмеченные теми же буквами, что и решённые в классе из задания 145.

Второй урок можно начать с разбора важной задачи 146 а) из домашнего задания, а затем нужно продолжить решение задач из задания 145.

Решения ряда задач из этого задания приведены на с. 106—109.

Задание на дом: п. 79; оставшиеся задачи из задания 146.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 79 учащиеся должны уметь формулировать и доказывать теоремы о первом и втором признаках подобия треугольников, проводить аналогию между первым (вторым) признаком подобия треугольников и первым (вторым) признаком равенства треугольников; решать задачи такого типа, как в задании 145, используя признаки подобия треугольников.

Уроки 59, 60 Теоремы об отрезках пересекающихся хорд и о квадрате касательной

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: доказать теоремы об отрезках пересекающихся хорд и о квадрате касательной и использовать их при решении задач; провести самостоятельные работы № 9 и № 10.

Первый урок можно начать с самостоятельной работы № 9.

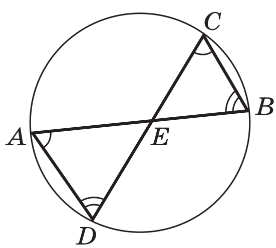


Рис. 12

Затем, сформулировав теорему об отрезках пересекающихся хорд и сделав на доске рисунок, повторяющий рисунок 110 учебника (рис. 12), учитель может задать вопрос: как доказать, что треугольники ADE и CBE подобны? В учебнике говорится о равенстве углов A и C (и также D и B) этих треугольников, поскольку они вписанные и опираются на одну и ту же дугу. Но можно воспользоваться также равенством углов с вершиной E (они вертикальные). Обосновав с помощью второго признака подобие треугольников ADE и CBE, нужно составить пропорцию для сторон этих треугольников. В треугольниках ADE и CBE сходственными сторонами являются AE и CE, DE и BE, поэтому пропорция имеет вид $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$, откуда и следует искомое равенство $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

После этого в классе решаются задачи 147 а), 147 б).

Задание на дом: п. 80 (включая изучение теоремы о квадрате касательной); вопросы 33, 34 (с. 120); задачи 148 а), 148 б).

На втором уроке нужно проверить (вызвав кого-то к доске) усвоение теоремы о квадрате касательной, решить задачи 147 в), 147 г), 147 д), 147 е) (сколько позволит время) и провести самостоятельную работу № 10.

Задание на дом: п. 80; задачи 148 в), 148 г), 148 д), 148 е).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 80 учащиеся должны уметь формулировать и доказывать теоремы об отрезках пересекающихся хорд и о квадрате касательной; решать задачи на применение этих теорем такого типа, как в задании 147.

Урок 61 Построение пропорциональных отрезков

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: решить две задачи на построение с помощью циркуля и линейки: 1) разделить данный отрезок AB на отрезки AM и MB, пропорциональные данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2, 2) построить отрезок, длина которого равна $\frac{ab}{c}$, где a, b и c — длины трёх данных отрезков, а также другие задачи подобного типа.

Решение первой задачи учителю целесообразно рассказать самому, а решение второй задачи полезно предложить учащимся найти самим, используя первую задачу. Кроме того, можно решить задачи 147 ж), 147 з).

Задание на дом: п. 81; вопросы 35, 36 (с. 120); задачи 148 ж), 148 з).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 81 учащиеся должны уметь объяснить решения двух задач на построение, разобранных в этом пункте; решать сходные задачи такого типа, как 147 ж), 147 з).

Урок 62 Метод подобия

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: объяснить учащимся, в чём состоит метод подобия решения задач на построение; разобрать несколько задач, решаемых методом подобия.

Начиная урок, нужно рассказать учащимся об основной идее метода подобия при решении задач на построение — сначала, используя только часть данных, строим фигуру, подобную искомой, а затем, привлекая остальные данные, строим искомую фигуру. Затем можно обсудить решение с помощью метода подобия задачи, описанной в п. 83, и решить этим же методом задачи 147 и), 147 к) (решения этих задач приведены на с. 109, 110). В конце урока можно провести математический диктант № 3.

Задание на дом: п. 82; вопрос 37 (с. 120); задачи 148 и), 148 к). Для наиболее подготовленных учащихся также п. 83.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 82 учащиеся должны уметь объяснить, в чём заключается метод подобия решения задач на построение; приводить примеры решения задач этим методом; решать задачи такого типа, как 147 и), 147 к).

Урок 63 Решение задач по теме «Решение треугольников»

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: разобрать несколько задач, при решении которых используются тригонометрические функции, теоремы синусов и косинусов, признаки подобия треугольников, другие утверждения и формулы, изученные в главе 6 «Решение треугольников»; подготовиться к контрольной работе.

Задачи для решения в классе и для домашнего задания учитель может отобрать по своему усмотрению из числа дополнительных задач к главе 6 (задачи 149—197).

Задание на дом: несколько задач (на усмотрение учителя) из числа дополнительных к главе 6 (задачи 149—197).

Урок 64 Контрольная работа № 3

Ответы и указания

Вар. 1. **1.** 3. **2.** 7. **3.** 24. **4.** 5 : 3.
Вар. 2. **1.** 1 см. **2.** 7. **3.** 12. **4.** 2 : 1.

Вар. 3. **1.** Указание. Воспользоваться тем, что $AB = BC$ и $\sin\angle ADB = \sin\angle BDC$. **2.** $\frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$. Указание. Пусть R — радиус окружности, описанной около данного треугольника. Доказать, что $R : \frac{a}{2} = a : \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$. **3.** $\frac{a}{2\sin\alpha}$. Указание. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD. Расстояние между основаниями перпендикуляров, проведённых из точек O_1 и O_2 к прямой BC, равно $\frac{1}{2}BC$, а острый угол между прямыми O_1O_2 и BC равен $|90° - \alpha|$. **4.** 7, 24 и 25. Указание. Стороны треугольника равны 7, $3 + x$ и $4 + x$, причём x удовлетворяет уравнению $7^2 + (3 + x)^2 = (4 + x)^2$.

Вар. 4. **1.** Воспользоваться тем, что $\sin\angle ADB = \sin\angle BDC$. **2.** $\frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4a + 2b}$. Указание. Пусть r — радиус окружности, вписанной в данный треугольник. Доказать, что $r : \left(a - \frac{b}{2}\right) = \frac{b}{2} : \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$. **3.** $2d\sin\alpha$. См. указание к задаче 3 варианта 3. **4.** 5. Указание. Сначала найти радиус окружности, вписанной в треугольник, а затем найти отрезки, на которые точка касания делит катет AC.

Уроки 65—67 Итоговое повторение

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: повторить основной теоретический материал курса геометрии, изученный в 8 классе; закрепить навыки решения задач; подготовиться к итоговой контрольной работе.

Для повторения основного материала, изученного в каждой из трёх глав учебника 8 класса, отводится по одному уроку на главу. Целесообразно повторять теоретический материал (в основном формулировки теорем) в процессе решения специально подобранных задач. Для этой цели можно использовать задачи из числа дополнительных задач к главам (задачи 13—42, 67—130, 149—197), а также задачи из книги «Дидактические материалы. 8 класс» (М.: Просвещение, 2011), подготовленной авторами для данного учебника. Отдельным ученикам можно предложить некоторые из задач повышенной трудности, в частности те задачи, решения которых приведены в этой книге.

В конце третьего урока можно провести самостоятельную работу № 11.

Урок 68 Контрольная работа № 4

Ответы и указания

Вар. 1. **2.** a, $a + b$, a и $a + b$. **3.** Указание. Треугольники DAO и CBO подобны. **4.** $\frac{37}{40}$, $-\frac{37}{40}$, $\frac{5}{16}$ и $-\frac{5}{16}$.

Вар. 2. **1.** Указание. Сначала доказать, что $\angle BAC = \angle ACD$. **2.** 40 см. **3.** Указание. Треугольники DAO и CBO подобны. **4.** $\frac{7}{8}$, $-\frac{7}{8}$, $\frac{1}{4}$ и $-\frac{1}{4}$.

Вар. 3. **1.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle AKN = \triangle CLM$ и $\triangle BKL = \triangle DNM$. **2.** 3 : 2, считая от точки A. Указание. Отметить на стороне AB точку A_2 так, что $A_1A_2 \parallel CC_1$, и найти отношение $AC_1 : C_1A_2$. **3.** Указание. Пусть окружности, вписанные в треугольники ABD и ACD, касаются отрезка AD в точках K и L. Сначала доказать, что $AB - BD = AC - CD$, а затем воспользоваться тем, что $AK = \frac{1}{2}(AB + AD - BD)$ и $AL = \frac{1}{2}(AC + AD - CD)$. **4.** 1. Указание. Пусть катеты AC и BC равны 15 и 20, CH — высота, K — точка касания вписанной окружности с гипотенузой AB. Доказать, что $AH = 9$ и $AK = 10$.

Вар. 4. **1.** $\frac{2ab}{a + b}$. Указание. Доказать, что если x — половина искомого отрезка, то $x : a = b : (a + b)$. **2.** 3 : 1, считая от точки A. См. указание к задаче 2 варианта 3. **3.** 15. Указание. Пусть AC — основание данного треугольника ABC, BH — его высота, AK — биссектриса треугольника ABH, O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Доказать, что $BK = 10$ и $BO = 25$. **4.** 6, 8 и 10. Указание. Пусть гипотенуза делится точкой касания на отрезки $2x$ и $3x$. Тогда катеты треугольника равны $2x + y$ и $3x + y$. Применить теорему Пифагора и получить равенство $x = y$, из которого следует, что периметр треугольника равен $12x$.

Почасовое тематическое планирование учебного материала

Содержание материала	Кол-во уроков	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
Вводное повторение	2	
Глава 4. Параллельность	**16**	Формулировать определение параллельных прямых; объяснять с помощью рисунка, какие углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, называются накрест лежащими, какие — односторонними и какие — соответственными; формулировать и доказывать теорему и следствия из неё, выражающие признаки параллельности двух прямых, основную теорему о параллельных прямых, теорему и следствия из неё, выражающие свойства параллельных прямых. Объяснять, что такое аксиомы геометрии и какие аксиомы уже использовались ранее, как связаны между собой аксиома существования прямоугольника с двумя данными смежными сторонами, принятая в данном курсе геометрии, и аксиома параллельных прямых, использующаяся во многих других учебниках.
§ 11. Параллельные прямые	9	
41. Признаки параллельности двух прямых	2	
42. Основная теорема о параллельных прямых	2	
43. Свойства параллельных прямых	2	
44. Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами	1	
45. Об аксиомах геометрии	1	
Решение задач	1	
§ 12. Вписанная и описанная окружности	4	Формулировать и доказывать теоремы о пересечении в одной точке биссектрис треугольника, о пересечении в одной точке серединных перпендикуляров к сторонам треугольника; о существовании и единственности вписанной в треугольник окружности, о существовании и единственности описанной около треугольника окружности.
46. Теорема о пересечении биссектрис треугольника	2	Решать задачи на построение, доказательство и вычисления, связанные с понятием параллельности прямых и понятиями вписанной в треугольник и описанной около него окружностей, опираясь на базовые задачи на построение, проводя в ходе решения необходимые доказательные рассуждения, выполняя нужные дополнительные построения
47. Вписанная окружность		
48. Теорема о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника	2	

49. Описанная окружность		
Решение задач по темам «Параллельные прямые», «Вписанная и описанная окружности»	2	
Контрольная работа № 1	1	
Глава 5. Многоугольники	**22**	Объяснять, что такое многоугольник, его вершины, стороны, диагонали, вписанная и описанная окружности; формулировать определение выпуклого многоугольника, выводить формулу суммы углов выпуклого n-угольника; формулировать определение правильного многоугольника, доказывать теоремы об окружности, описанной около правильного многоугольника, и окружности, вписанной в него; строить некоторые правильные многоугольники. Формулировать и доказывать утверждения о свойстве сторон описанного четырёхугольника и о свойстве углов вписанного четырёхугольника, формулировать обратные утверждения. Формулировать определения и изображать параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапецию, равнобедренную и прямоугольную трапеции. Формулировать и доказывать утверждения о свойствах и признаках параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата; исследовать свойства четырёхугольников с помощью компьютерных программ. Формулировать определения фигур, симметричных относительно точки и симметричных относительно прямой, приводить примеры симметричных фигур, находить элементы симметрии в известных видах многоугольников. Формулировать и доказывать теоремы о средней линии треугольника, о средней линии трапеции, теорему Фалеса, теоремы о пересечении медиан треугольника и о пересечении высот треугольника.
§ 13. Многоугольник	5	
50. Выпуклый многоугольник	1	
51. Четырёхугольник	2	
52. Правильные многоугольники	2	
§ 14. Параллелограмм и трапеция	9	
53. Свойства параллелограмма	2	
54. Признаки параллелограмма	2	
55. Признаки прямоугольника	1	
56. Ромб	1	
57. Трапеция	1	
58. Симметрия	1	
Решение задач	1	
§ 15. Теорема Фалеса	5	
59. Средняя линия треугольника	1	
60. Средняя линия трапеции	1	
61. Теорема Фалеса	1	

Содержание материала	Кол-во уроков	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
62. Теорема о пересечении медиан треугольника	1	Решать задачи на построение, доказательство и вычисления, моделировать условие задачи с помощью чертежа, проводить дополнительные построения в ходе решения, использовать известные утверждения о четырёхугольниках
63. Теорема о пересечении высот треугольника	1	
Решение задач по теме «Многоугольники»	2	
Контрольная работа № 2	1	
Глава 6. Решение треугольников	**24**	Формулировать определения и иллюстрировать понятия косинуса и синуса острого угла прямоугольного треугольника; доказывать, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то косинусы этих углов равны и синусы этих углов также равны; формулировать и доказывать теорему Пифагора и обратную ей; объяснять, что такое золотое сечение, строить золотое сечение данного отрезка. Формулировать определения синуса и косинуса для углов от 90° до 180°, определения тангенса и котангенса; выводить формулы приведения и основное тригонометрическое тождество; формулировать и доказывать теорему синусов и теорему косинусов, объяснять, как использовать эти теоремы в задачах на решение треугольника. Формулировать определение подобных треугольников, формулировать и доказывать теоремы о признаках подобия треугольников, об отрезках пересекающихся хорд, о квадрате касательной; объяснять, в чём состоит метод подобия при решении задач на построение, приводить примеры применения этого метода.
§ 16. Косинус и синус острого угла	8	
66. Пропорциональные отрезки	1	
67. Косинус острого угла	2	
68. Синус острого угла	1	
69. Среднее геометрическое и среднее арифметическое двух отрезков	1	
70. Теорема Пифагора	2	
71. Золотое сечение	1	
Решение задач	1	
§ 17. Теоремы синусов и косинусов	7	
72. Синус и косинус углов от 90° до 180°	2	

73. Теорема синусов	1	Решать задачи на построение, доказательство и вычисления с использованием всего арсенала накопленных геометрических сведений
74. Теорема косинусов	2	
75. Решение треугольников	2	
§ 18. Подобные треугольники	6	
78. Свойство углов подобных треугольников	1	
79. Признаки подобия треугольников	2	
80. Теоремы об отрезках пересекающихся хорд и о квадрате касательной	1	
81. Построение пропорциональных отрезков	1	
82. Метод подобия	1	
Решение задач по теме «Решение треугольников»	2	
Контрольная работа № 3	1	
Итоговое повторение. Решение задач	3	
Контрольная работа № 4	1	
Всего	**68**	

Решения некоторых задач

Глава 4

4.

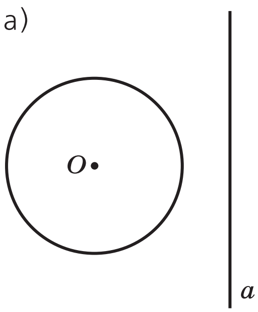
г) **Дано:** окружность с центром O и прямая a (рис. 13, *а*).

Построить: касательную к данной окружности, перпендикулярную к данной прямой.

Вопрос: сколько решений имеет эта задача?

Решение. Построим прямую OA, перпендикулярную к данной прямой a ($A \in a$), затем прямую OB, перпендикулярную к прямой OA (точка B лежит на окружности), и, наконец, прямую BC, перпендикулярную к прямой a (точка C лежит на прямой a, рис. 13, *б*). Прямая BC — искомая касательная.

В самом деле, прямая BC проходит через точку B окружности и перпендикулярна к радиусу OB. Это следует из того, что углы A, O и C четырёхугольника $AOBC$ прямые, а в таком случае этот четырёхугольник является прямоугольником (это было доказано в 7 классе) и, следовательно, $BC \perp OB$. Поэтому прямая BC является касательной к окружности, а так как по построению она перпендикулярна к данной прямой a, то прямая BC — искомая касательная.



Задача имеет два решения — вторая касательная (прямая B_1C_1) изображена на рисунке 13, *в*.

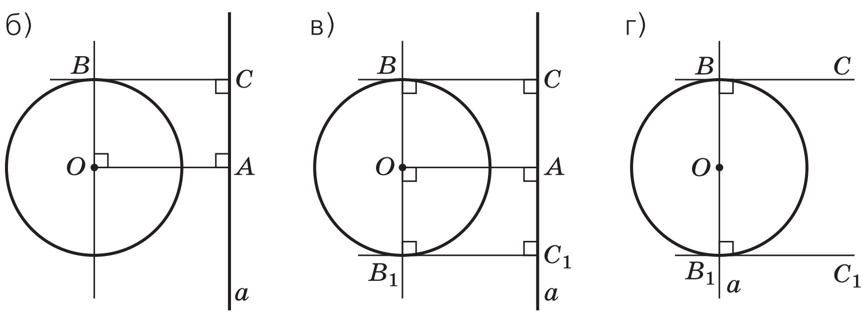


Рис. 13

Замечание. Если данная прямая a проходит через центр O данной окружности (рис. 13, *г*), то решение задачи упрощается — нужно через точки B и B_1 пересечения прямой a с окружностью провести прямые BC и B_1C_1, перпендикулярные к прямой a.

5.

в) **Дано:** четырёхугольник $ABCD$, $OA = OC$, $AD \parallel BC$ (рис. 14).

Доказать: $AB = CD$.

Решение. 1) Так как $AD \parallel BC$, то $\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие углы).

2) $\angle AOD = \angle BOC$ (вертикальные углы).

3) $\triangle AOD = \triangle COB$ по стороне ($OA = OC$) и прилежащим к ней углам ($\angle 1 = \angle 2$, $\angle AOD = \angle BOC$). Отсюда следует, что $OD = OB$.

4) $\triangle AOB = \triangle COD$ по двум сторонам ($OA = OC$ и $OB = OD$) и углу между ними ($\angle AOB$ и $\angle COD$ — вертикальные углы). Следовательно, $AB = CD$, что и требовалось доказать.

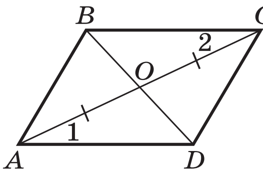


Рис. 14

д) **Дано:** AB и CD — хорды окружности, $AB \parallel CD$ (рис. 15).

Доказать: $AC = BD$.

Решение. Возможны два случая (рис. 15, *а* и рис. 15, *б*). Так как $AB \parallel CD$, то $\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие углы). В первом случае из этого следует, что $\smile AC = \smile BD$ (на эти дуги опираются равные вписанные углы 1 и 2). Из равенства дуг AC и BD следует равенство хорд: $AC = BD$ (это было доказано в 7 классе).

Во втором случае $\smile BC = \smile AD$, поэтому $\smile ABC = \smile AB + \smile BC = \smile AB + \smile AD = \smile BAD$. Из равенства $\smile ABC = \smile BAD$ следует, что $AC = BD$, что и требовалось доказать.

е) **Дано:** $\triangle ABC$, P и Q — точки касания окружности и сторон AB и AC, $PQ \parallel BC$ (рис. 16).

Доказать: $AB = AC$.

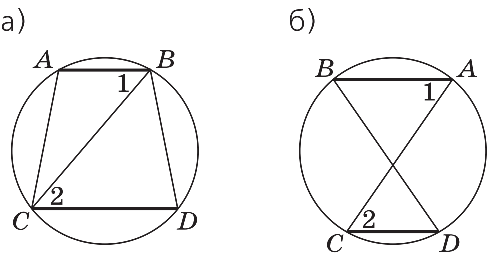


Рис. 15

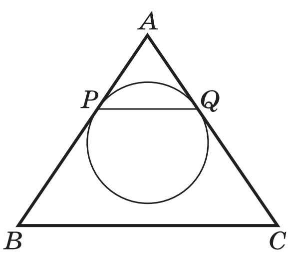


Рис. 16

Решение. 1) $AP = AQ$ (отрезки касательных, проведённые из одной точки), поэтому $\triangle APQ$ равнобедренный и $\angle APQ = \angle AQP$.

2) $\angle B = \angle APQ$ и $\angle C = \angle AQP$ (соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых BC и PQ секущими AB и AC).

3) Так как $\angle B = \angle APQ = \angle AQP = \angle C$, то $AB = AC$, что и требовалось доказать.

7.

а) Дано: точки B и C равноудалены от прямой AD, $AO = OD$ (рис. 17).

Доказать: $AB = CD$.

Решение. 1) Так как точки B и C равноудалены от прямой AD и лежат по одну сторону от прямой AD, то $BC \parallel AD$ и, следовательно, $\angle 3 = \angle 1$, $\angle 4 = \angle 2$ (накрест лежащие углы).

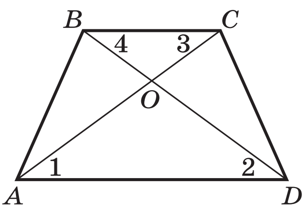


Рис. 17

2) $AO = OD$ (по условию), поэтому $\angle 1 = \angle 2$ (углы при основании равнобедренного треугольника).

3) Так как $\angle 3 = \angle 1 = \angle 2 = \angle 4$, то треугольник BOC равнобедренный и $BO = OC$.

4) $\triangle AOB = \triangle DOC$ по двум сторонам ($AO = OD$ и $BO = OC$) и углу между ними ($\angle AOB = \angle DOC$). Следовательно, $AB = CD$, что и требовалось доказать.

б) Дано: прямая a и отрезок PQ (рис. 18, $а$).

Построить: прямую b, параллельную прямой a, так, чтобы расстояние между прямыми a и b было равно PQ.

Вопрос: сколько решений имеет эта задача?

Решение. 1) Отметим на прямой a какую-нибудь точку A и проведём через точку A прямую c, перпендикулярную к прямой a (рис. 18, $б$).

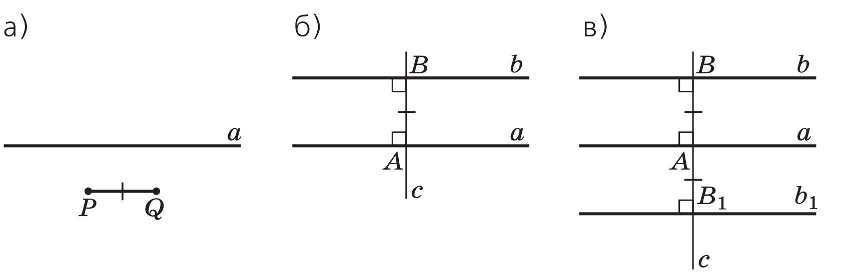


Рис. 18

2) На одном из лучей прямой c, исходящих из точки A, отложим отрезок AB, равный отрезку PQ (см. рис. 18, *б*).

3) Через точку B проведём прямую b, перпендикулярную к прямой c (см. рис. 18, *б*).

Прямая b — искомая. В самом деле, она параллельна прямой a, так как обе прямые a и b перпендикулярны к прямой c и, кроме того, расстояние между прямыми a и b равно AB и, следовательно, равно PQ.

4) Задача имеет два решения — прямые b и b_1 на рисунке 18, *в*.

г) **Дано:** отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 (рис. 19, *а*).

Построить: треугольник ABC, в котором $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, высота CH равна P_3Q_3.

Решение. 1) Проведём прямую и на ней отложим отрезок AB, равный P_1Q_1.

2) Построим прямую c, параллельную прямой AB, так, чтобы расстояние между этими прямыми было равно P_3Q_3 (рис. 19, *б*). Как построить прямую c, мы знаем (задача 7 б)).

3) Построим окружность радиуса P_2Q_2 с центром A (рис. 19, *в*). Если эта окружность имеет общую точку с прямой c, то обозначим её буквой C.

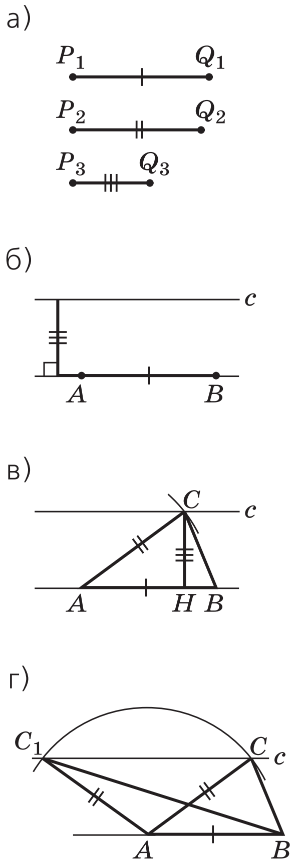


Рис. 19

Треугольник ABC — искомый, так как он удовлетворяет всем условиям задачи: $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$ и высота CH равна расстоянию между параллельными прямыми AB и c, т. е. равна P_3Q_3.

4) Окружность радиуса P_2Q_2 с центром A может не иметь общих точек с прямой c. Так будет, если $P_2Q_2 < P_3Q_3$. В этом случае задача не имеет решений. Если $P_2Q_2 = P_3Q_3$, то указанная окружность касается прямой c и задача имеет единственное решение.

Если же $P_2Q_2 > P_3Q_3$, то окружность радиуса P_2Q_2 с центром A пересекается с прямой c в двух точках, и задача имеет два решения — треугольники ABC и ABC_1 на рисунке 19, *г*.

9.

в) **Дано:** стороны треугольника ABC касаются окружности в точках D, E и F (рис. 20, *а*), $AB = 6$ см, $BC = 10$ см, $CA = 14$ см.

Найти: AD, DB, BE, EC, CF и FA.

Решение. Пусть $AD = x$, $DB = y$, $EC = z$. Так как отрезки касательных, проведённые из одной точки, равны, то $AF = x$, $BE = y$, $CF = z$ (рис. 20, *б*). Следовательно, $AB = x + y = 6$ см, $BC = y + z = 10$ см, $AC = z + x = 14$ см.

Решив систему трёх уравнений относительно x, y, z, получим: $x = 5$ см, $y = 1$ см, $z = 9$ см.

Ответ. $AD = FA = 5$ см, $DB = BE = 1$ см, $EC = CF = 9$ см.

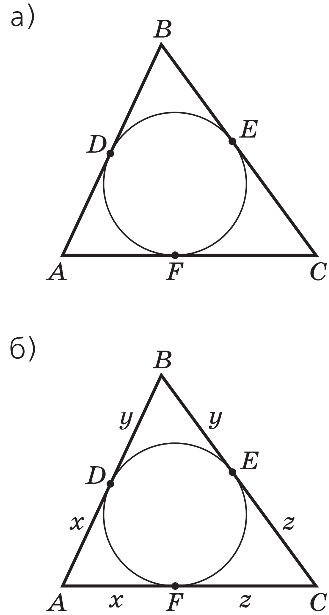


Рис. 20

г) **Дано:** треугольник ABC описан около окружности с центром O, $OD \parallel AC$, $OE \parallel AB$ (рис. 21, *а*).

Доказать: $AD = DO = OE = EA$.

Решение. Проведём отрезок AO (рис. 21, *б*). Так как центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис треугольника, то луч OA — биссектриса угла A, т. е. $\angle 1 = \angle 2$, а поскольку $\angle 1 = \angle 4$ и $\angle 2 = \angle 3$ (накрест лежащие углы), то $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$. Следовательно, треугольники ADO и AEO равнобедренные и, кроме того, они равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Поэтому $AD = DO = OE = EA$, что и требовалось доказать.

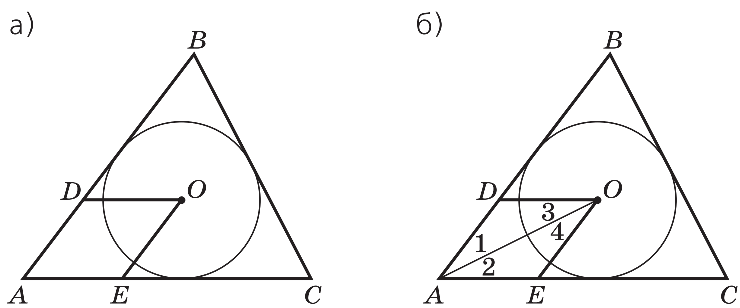


Рис. 21

11.

в) **Дано:** биссектриса угла A равнобедренного треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D, $\angle BDC = 70°$.

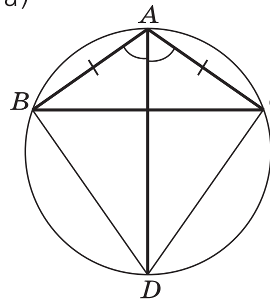
Найти: углы A, B и C.

Решение. Возможны два случая.

I. Вершина A является противоположной основанию BC равнобедренного треугольника ABC (рис. 22, *а*).

Поскольку угол BDC — вписанный, опирающийся на дугу BAC, то $\smile BAC = 2 \cdot \angle BDC = 140°$. Следовательно, $\smile BDC = 360° - \smile BAC = 220°$, а $\angle BAC = \frac{1}{2}\smile BDC = 110°$. Учитывая то, что углы при основании равнобедренного треугольника равны, получаем $\angle B = \angle C = \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 35°$.

а)



б)

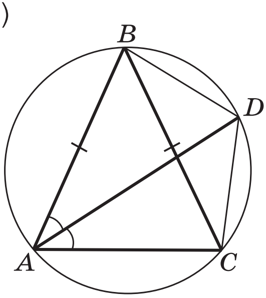


Рис. 22

II. Вершина A является одним из концов основания равнобедренного треугольника ABC (рис. 22, *б*).

Как и в случае I, получаем $\angle BAC = 110°$. Но угол при основании равнобедренного треугольника не может быть тупым. Следовательно, случай II невозможен.

Ответ: $\angle A = 110°$, $\angle B = \angle C = 35°$.

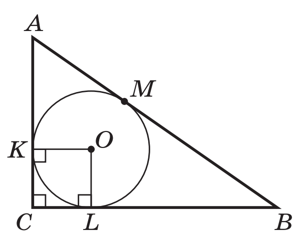
г) **Дано:** $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности.

Доказать: $AC + BC = 2r + 2R$.

Решение. Пусть вписанная окружность касается катетов AC, BC и гипотенузы AB в точках K, L и M (рис. 23). Тогда $AK = AM$ и $BL = BM$ (отрезки касательных, проведённые из одной точки, равны). Следовательно, $AC + BC = (AK + KC) + (BL + LC) = (AM + BM) + (KC + LC) = AB + (KC + LC)$.

Четырёхугольник $OKCL$ — квадрат со стороной r, так как у него три прямых угла и $OK = OL = r$. Поэтому $KC = LC = r$.

Гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром окружности, проходящей через все его вершины (это было доказано ещё в 7 классе), т. е. является диаметром описанной окружности.



$OK = OL = r$

Рис. 23

Таким образом, $AB = 2R$, и мы получаем искомое равенство $AC + BC = 2r + 2R$.

15.

Дано: четырёхугольник $ABCD$, $AB = BC$, $CD = DA$, точка M лежит на отрезке BC, $DM = MB$ (рис. 24, *а*).

Доказать: $DM \parallel AB$.

Решение. 1) Треугольники ABC и ADC равнобедренные (рис. 24, *б*), откуда следует, что $\angle BAD = \angle BCD$.

2) $\triangle BAD = \triangle BCD$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

3) Так как $DM = MB$ (по условию), то $\angle 3 = \angle 2$.

4) Итак, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 2$. Следовательно, накрест лежащие углы 1 и 3, образованные при пересечении прямых DM и AB секущей BD, равны, поэтому $DM \parallel AB$, что и требовалось доказать.

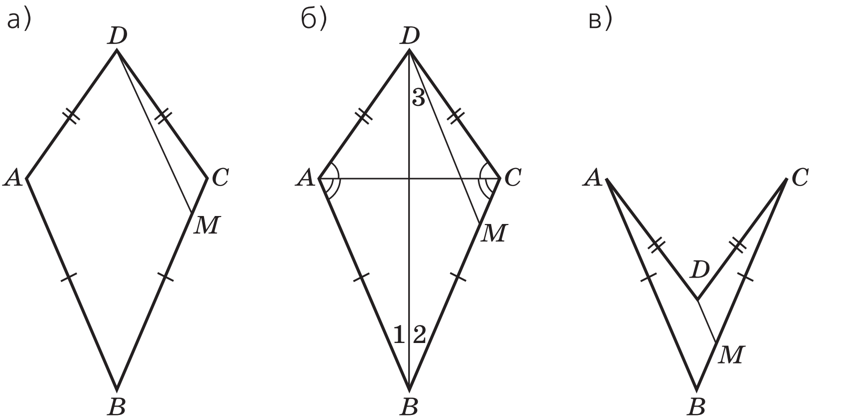


Рис. 24

Замечание. Данный четырёхугольник $ABCD$ может иметь иной вид (рис. 24, *в*). Учителю целесообразно отметить, что четырёхугольник на рисунке 24, *а* является выпуклым, а на рисунке 24, *в* — невыпуклым и что понятия выпуклого и невыпуклого четырёхугольников будут вскоре введены. Доказательство параллельности прямых DM и AB для невыпуклого четырёхугольника проводится в точности так же, как для выпуклого четырёхугольника.

16*.

Дано: любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b.

Доказать: $a \parallel b$.

Решение. Проведём доказательство методом от противного. Допустим, что прямые a и b не параллельны. Отметим на прямой a какую-нибудь точку M, не лежащую на прямой b, и проведём через точку M прямую c, параллельную прямой b (рис. 25). Мы получили прямую, которая пересекает прямую a (в точке M) и не пересекает прямую b (так как $c \parallel b$). Но это противоречит условию задачи. Следовательно, наше предположение неверно и $a \parallel b$, что и требовалось доказать.

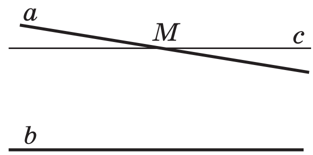


Рис. 25

19.

Дано: $\triangle ABC$, BO и CO — биссектрисы углов B и C, $OP \parallel AB$, $OQ \parallel AC$ (рис. 26).

Доказать: $OP + PQ + QO = BC$.

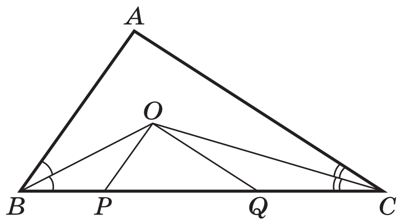


Рис. 26

Решение. 1) $\angle POB = \angle ABO$ (накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых OP и AB секущей OB), а так как $\angle ABO = \angle PBO$ (по условию), то $\angle POB = \angle PBO$. Следовательно, $\triangle POB$ равнобедренный с равными сторонами OP и BP.

2) Аналогично доказывается, что $QO = QC$.

3) Итак, $OP + PQ + QO = BP + PQ + QC = BC$, что и требовалось доказать.

22.

Дано: $\angle A = 135°$, $\angle B = 85°$, $\angle C = 140°$ (рис. 27, *а*).

Доказать: $AE \parallel CD$.

Решение. 1) Проведём прямую BF параллельно прямой AE (рис. 27, *б*). Тогда $\angle A + \angle ABF = 180°$ (односторонние углы), откуда следует, что $\angle ABF = 180° - \angle A = 45°$, поэтому $\angle CBF = \angle CBA - \angle ABF = 85° - 45° = 40°$.

2) Следовательно, $\angle CBF + \angle C = 40° + 140° = 180°$, а так как угол CBF и угол C — односторонние углы, образованные при пересечении прямых BF и CD секущей BC, то $BF \parallel CD$.

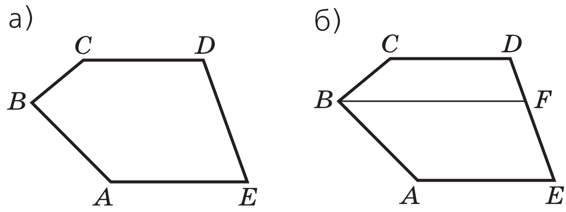


Рис. 27

3) Поскольку $BF \parallel AE$ (по построению) и $BF \parallel CD$, то $AE \parallel CD$, что и требовалось доказать.

24.

Дано: AB — хорда окружности, прямые A_1A и B_1B — касательные к окружности, $A_1A \parallel B_1B$ (рис. 28, *а*).

Доказать: хорда AB — диаметр окружности.

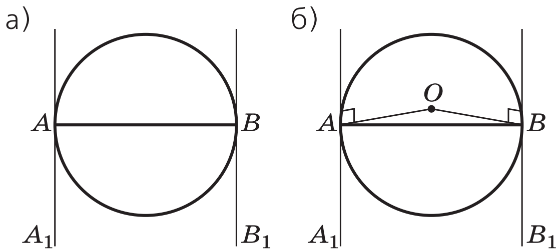


Рис. 28

Решение. Проведём доказательство методом от противного. Допустим, что хорда AB не является диаметром; тогда можно считать, что точки A_1 и B_1 лежат по одну сторону от прямой AB, а точка O — по другую (рис. 28, *б*). Проведём радиусы OA и OB. Так как $\angle A_1AO = \angle B_1BO = 90°$, то $\angle A_1AB < 90°$ и $\angle B_1BA < 90°$, откуда следует, что

$$\angle A_1AB + \angle B_1BA < 180°. \qquad (1)$$

Но углы A_1AB и B_1BA являются односторонними углами, образованными при пересечении параллельных прямых A_1A и B_1B секущей AB, поэтому $\angle A_1AB + \angle B_1BA = 180°$. Это равенство противоречит неравенству (1), и, следовательно, наше предположение неверно, т. е. хорда AB является диаметром окружности, что и требовалось доказать.

31.

Дано: $a \parallel b$.

Вопрос: что представляет собой множество середин всех отрезков AB, где $A \in a$, $B \in b$?

Решение. Обозначим буквой O середину отрезка AB, у которого $A \in a$, $B \in b$, и проведём через точку O прямую A_1B_1 ($A_1 \in a$, $B_1 \in b$), перпендикулярную к прямой a, а значит, и к прямой b (рис. 29, *а*).

Если точки A_1 и A не совпадают, то получаются прямоугольные треугольники OAA_1 и OBB_1. Они равны по гипотенузе ($OA = OB$) и острому углу ($\angle OAA_1 = \angle OBB_1$, так как эти углы — накрест лежащие, образованные при пересечении параллельных прямых a и b секущей AB). Следовательно, $OA_1 = OB_1$, т. е. точка O равноудалена от параллельных прямых a и b (рис. 29, *б*). Поэтому она лежит на прямой c, параллельной данным прямым и находящейся на равных расстояниях от них, — это следует из результата задачи 30.

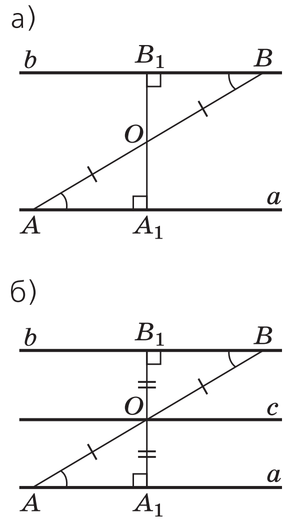


Рис. 29

Если точки A_1 и A совпадают, то отрезок A_1B_1 совпадает с отрезком AB, и снова $O \in c$.

Итак, середина любого отрезка AB, где $A \in a$, $B \in b$, лежит на указанной прямой c.

Верно и обратное: каждая точка O прямой c является серединой любого отрезка AB, проходящего через точку O и такого, что $A \in a$, $B \in b$. Для отрезка AB на рисунке 29, *б* равенство $OA = OB$ следует из равенства прямоугольных треугольников OAA_1 и OBB_1 — они равны по катету ($OA_1 = OB_1$) и противолежащему углу ($\angle OAA_1 = \angle OBB_1$).

Таким образом, искомым множеством точек является прямая c.

Ответ: прямая, параллельная данным прямым и находящаяся на равных расстояниях от них.

33.

Дано: $\triangle ABC$, $BP = AB$, $BM = MC$, $MQ = AM$ (рис. 30, *а*).
Доказать: $BC = PQ$.

Решение. 1) Проведём отрезок BQ (рис. 30, *б*). $\triangle AMC = \triangle QMB$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $BQ = AC$ и $\angle 1 = \angle 2$.

2) $AC \parallel BQ$, так как накрест лежащие углы 1 и 2, образованные при пересечении прямых AC и BQ секущей AQ, равны. Отсюда следует, что $\angle CAB = \angle QBP$ (соответственные углы равны).

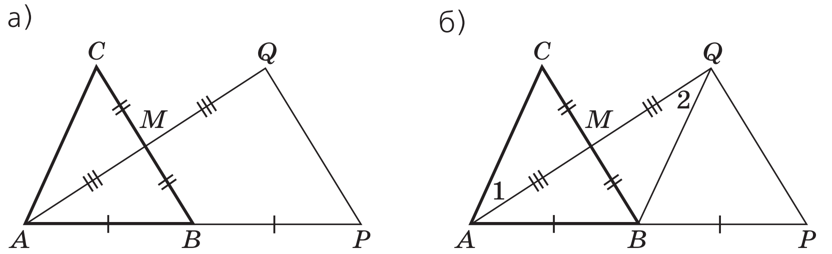


Рис. 30

3) $\triangle ACB = \triangle BQP$ по двум сторонам ($AB = BP$ по условию, $AC = BQ$) и углу между ними ($\angle CAB = \angle QBP$). Следовательно, $BC = PQ$, что и требовалось доказать.

35*.

Дано: отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 (рис. 31, *а*).

Построить: треугольник ABC, в котором $AB = P_1Q_1$, высота CH равна P_2Q_2, медиана AM равна P_3Q_3.

Решение. 1-й способ (соответствующий указанию, данному в учебнике). Предположим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 31, *б*). Его вершина C лежит на прямой c, параллельной прямой AB, причём расстояние между прямыми c и AB равно P_2Q_2. Точка M является серединой отрезка BC, концы которого лежат на параллельных прямых AB и c, поэтому точка M лежит на прямой b, параллельной прямым AB и c и находящейся на

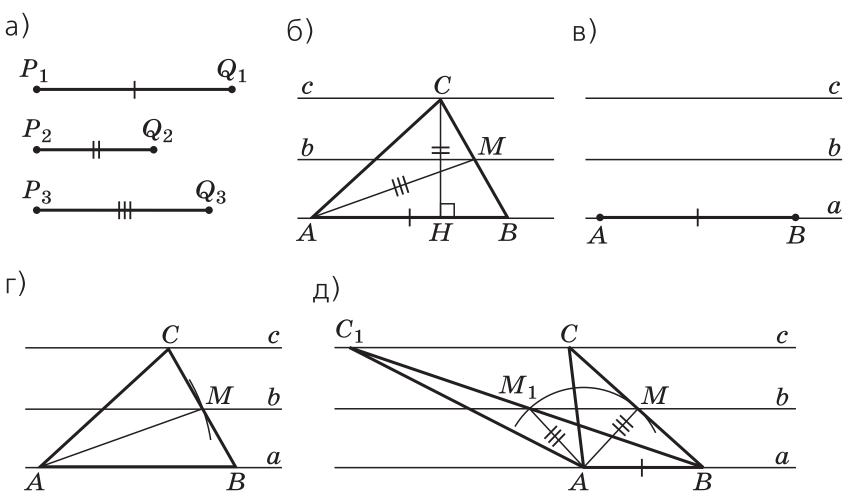


Рис. 31

равных расстояниях от них (задача 31). Эти расстояния равны $\frac{1}{2}P_2Q_2$. Отсюда следует, что искомый треугольник ABC можно построить так:

1) проведём произвольную прямую b, затем построим параллельные ей прямые a и c, находящиеся на расстоянии $\frac{1}{2}P_2Q_2$ от прямой b, и на прямой a отложим отрезок $AB = P_1Q_1$ (рис. 31, *в*);

2) проведём окружность радиуса P_3Q_3 с центром A;

3) если эта окружность и прямая b имеют общую точку, то обозначим её буквой M и проведём прямую BM (рис. 31, *г*);

4) точку пересечения прямых BM и c обозначим буквой C и проведём отрезок AC.

Треугольник ABC искомый. В самом деле, в этом треугольнике $AB = P_1Q_1$, высота CH равна расстоянию между параллельными прямыми a и c, т. е. равна P_2Q_2, и медиана AM равна P_3Q_3. Таким образом, построенный треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Если $P_3Q_3 < \frac{1}{2}P_2Q_2$, то окружность радиуса P_3Q_3 с центром A не пересекается с прямой b и задача не имеет решения. Если $P_3Q_3 = \frac{1}{2}P_2Q_2$, то эта окружность касается прямой b в точке M и задача имеет единственное решение. Если же $P_3Q_3 > \frac{1}{2}P_2Q_2$, то указанная окружность пересекается с прямой b в двух точках (точки M и M_1 на рис. 31, *д*) и задача имеет два решения — треугольники ABC и ABC_1 на рисунке 31, *д*.

2-й с п о с о б. 1) Построим прямоугольный треугольник AMK по гипотенузе $AM = P_3Q_3$ и катету $MK = \frac{1}{2}P_2Q_2$ (рис. 32, *а*).

2) На луче AK отложим отрезок $AB = P_1Q_1$.

3) Проведём прямую BM и на продолжении луча MB отложим отрезок $MC = MB$ (рис. 32, *б*).

4) Проведём отрезок AC и получим искомый треугольник ABC.

5) Второе решение получится, если отрезок AB, равный P_1Q_1, отложить не на луче AK, а на продолжении этого луча.

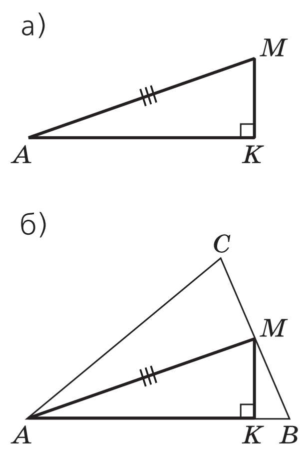


Рис. 32

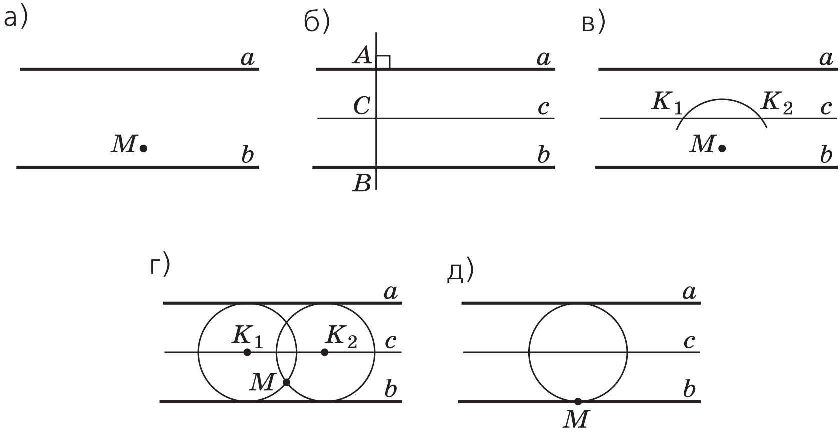


Рис. 33

36.

Дано: $a \parallel b$, точка M (рис. 33, *а*).

Построить: окружность, проходящую через точку M и касающуюся прямых a и b.

Решение. 1) Построим прямую c, параллельную прямым a и b и находящуюся на равных расстояниях от них. Это можно сделать, например, так: построим какую-нибудь прямую AB, перпендикулярную к прямым a и b ($A \in a$, $B \in b$), затем построим середину отрезка AB (точка C на рис. 33, *б*) и через точку C проведём прямую c, параллельную прямой a.

2) Проведём окружность радиуса AC с центром M (рис. 33, *в*). Если точка M лежит между прямыми a и b, то эта окружность пересечёт прямую c в двух точках (точки K_1 и K_2 на рисунке 33, *в*).

3) Проведём две окружности радиуса AC с центрами K_1 и K_2 (рис. 33, *г*). Это и есть искомые окружности.

В самом деле, $K_1M = K_2M = AC$, поэтому обе окружности проходят через точку M, а так как расстояния от центров K_1 и K_2 окружностей до прямых a и b равны радиусу окружностей, то эти окружности касаются прямых a и b.

Если точка M лежит на какой-нибудь из прямых a и b, то искомая окружность одна (рис. 33, *д*), а если она лежит вне полосы между прямыми a и b, то задача не имеет решений.

37.

Дано: $\triangle ABC$, $DE \parallel AC$, $AD = DM$, $CE = EM$ (рис. 34, *а*).
Доказать: луч BM — биссектриса угла ABC.

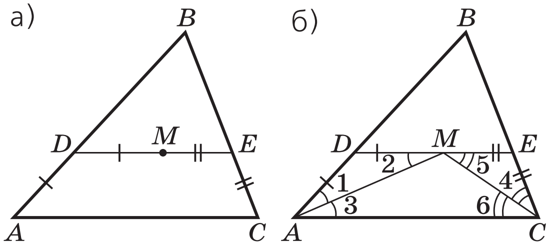


Рис. 34

Решение. 1) Проведём отрезки AM и CM. Так как треугольники ADM и CEM равнобедренные (по условию), то $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 4 = \angle 5$ (рис. 34, *б*).

2) Так как $DE \parallel AC$, то $\angle 2 = \angle 3$ и $\angle 5 = \angle 6$ (накрест лежащие углы).

3) Из равенств для углов следует, что $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 4 = \angle 6$, т. е. лучи AM и CM — биссектрисы углов BAC и ACB.

4) Так как биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, то биссектриса угла ABC проходит через точку M, что и требовалось доказать.

41.

Дано: центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на медиане AM.

Доказать: треугольник ABC либо равнобедренный, либо прямоугольный.

Решение. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, и, в частности, он лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC. Этот серединный перпендикуляр проходит через середину M стороны BC, поэтому точка M — общая точка данного серединного перпендикуляра и медианы AM треугольника ABC. Возможны два случая.

I. Медиана AM целиком принадлежит серединному перпендикуляру к стороне BC. В этом случае она является также высотой треугольника (рис. 35, *а*) и, следовательно, треугольник ABC равнобедренный.

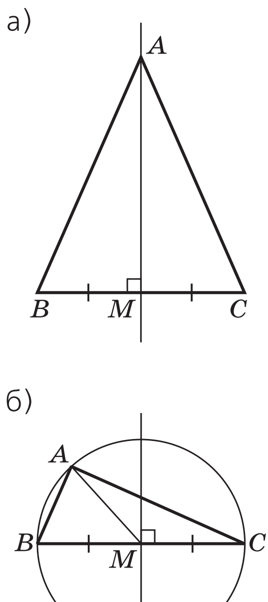


Рис. 35

II. Точка M — единственная общая точка медианы AM и серединного перпендикуляра к стороне BC. Тогда, согласно условию задачи, точка M является центром окружности, описанной около треугольника ABC, и, следовательно, вписанный угол BAC опирается на полуокружность (рис. 35, *б*). Поэтому угол $BAC = 90°$, т. е. треугольник ABC прямоугольный.

Итак, треугольник ABC либо равнобедренный, либо прямоугольный, что и требовалось доказать.

42.

Дано: $\triangle ABC$, $AB \neq AC$, AH — высота, AM — медиана, AD — биссектриса треугольника (рис. 36, *а*).

Доказать: точка D лежит на отрезке HM.

Решение. Обозначим буквой K точку пересечения биссектрисы угла BAC с окружностью, описанной около треугольника ABC (рис. 36, *б*). Вписанные углы BAK и CAK равны (так как AK — биссектриса угла BAC), поэтому $\smile BK = \smile KC$. Из этого следует, что хорды BK и KC равны. Следовательно, медиана KM равнобедренного треугольника BKC является его высотой, т. е. $MK \perp BC$, а так как $AH \perp BC$, то $AH \parallel MK$.

Таким образом, концы отрезка AK лежат на параллельных прямых AH и MK, поэтому все остальные точки отрезка AK, и в том числе точка D, лежат в полосе между этими прямыми. Отсюда следует, что точка D лежит между точками H и M, что и требовалось доказать.

Замечание. Эта задача содержится также в учебнике 7 класса (задача 158), но там предлагается другое решение, основанное только на фактах, установленных в главе 2.

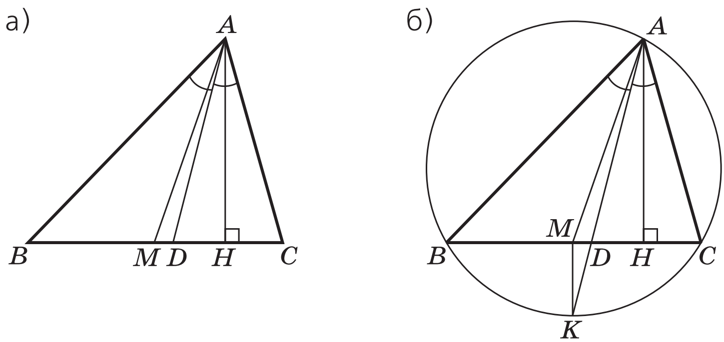


Рис. 36

Глава 5

44.

ж) **Дано:** выпуклый 1000-угольник.

Вопрос: на какое наименьшее число треугольников его можно разрезать?

Решение. Пусть выпуклый 1000-угольник разрезан на n треугольников. Сумма углов всех этих треугольников равна $n \cdot 180°$, и она не меньше, чем сумма углов данного 1000-угольника, т. е. не меньше, чем $998 \cdot 180°$. Итак, $n \cdot 180° \geqslant 998 \cdot 180°$, откуда получаем $n \geqslant 998$. Наименьшее число n, удовлетворяющее этому неравенству, равно 998. На 998 треугольников можно разрезать выпуклый 1000-угольник, если сделать разрезы по всем диагоналям, проведённым из какой-то одной вершины.

Ответ: 998.

з) **Дано:** сумма углов выпуклого n-угольника в k раз больше суммы углов выпуклого $(n-1)$-угольника, где k — натуральное число.

Найти: k.

Решение. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\,180°$, сумма углов выпуклого $(n-1)$-угольника равна $(n-3)\,180°$. По условию $(n-2)\,180° = k(n-3)\,180°$, откуда $n-2 = k(n-3)$ или $k = \dfrac{n-2}{n-3}$. Запишем это равенство в виде $k = 1 + \dfrac{1}{n-3}$. Если $n = 4$, то $k = 2$, а если $n \geqslant 5$, то $n - 3 \geqslant 2$, поэтому $\dfrac{1}{n-3} \leqslant \dfrac{1}{2}$, и число k не будет натуральным.

Итак, $k = 2$ — единственное натуральное число, удовлетворяющее условию задачи (при этом $n = 4$).

Ответ: $k = 2$.

45.

в) **Дано:** четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AD, $\angle B = 110°$, $\angle C = 130°$ (рис. 37).

Найти: $\angle A$, $\angle D$, $\angle ACB$.

Решение. Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна $180°$, поэтому $\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$, откуда получаем $\angle A = 180° - 130° =$

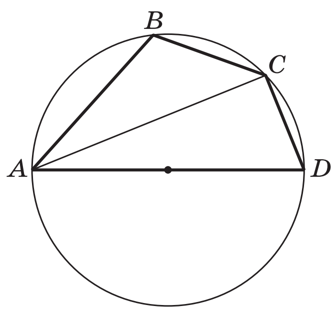


Рис. 37

$= 50°$, $\angle D = 180° - 110° = 70°$. Так как $\angle ACD = 90°$ (вписанный угол, опирающийся на полуокружность), то $\angle ACB = \angle BCD - \angle ACD = 130° - 90° = 40°$.

Ответ. $\angle A = 50°$, $\angle D = 70°$, $\angle ACB = 40°$.

47.

ж) Дано: окружность и описанные около неё правильный n-угольник и правильный $2n$-угольник.

Доказать: периметр $2n$-угольника меньше периметра n-угольника.

Решение. На рисунке 38 изображена дуга окружности с центром O, прямая BD касается окружности в точке A, $\angle BOD = \dfrac{360°}{n}$, лучами OC, OA и OE угол BOD разделён на четыре равных угла, поэтому отрезок BD — сторона описанного около окружности правильного n-угольника, отрезок AB — половина этой стороны, отрезок CE — сторона описанного правильного $2n$-угольника, отрезок AC — половина этой стороны, прямая FC касается окружности в точке F, отрезок FC также половина стороны описанного правильного $2n$-угольника ($FC = AC$).

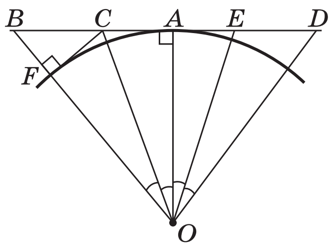


Рис. 38

Чтобы доказать, что периметр данного $2n$-угольника меньше периметра n-угольника, достаточно доказать, что сторона CE $2n$-угольника меньше половины стороны n-угольника, т. е. $CE < AB$ или $2AC < AB$. Но $AB = AC + BC$, а $BC > FC$ (гипотенуза BC прямоугольного треугольника BCF больше катета FC), поэтому $2AC = AC + FC < AC + BC = AB$, что и требовалось доказать.

49.

и) Дано: три точки A, B и C, являющиеся вершинами параллелограмма (рис. 39, *а*).

Построить: точку D, являющуюся четвёртой вершиной параллелограмма.

Вопрос: сколько решений имеет эта задача?

Решение. Возможны три случая.

I. Точка A является соседней с вершиной B и соседней с вершиной C. В этом случае для построения точки D можно поступить так: через точку C проведём прямую, параллельную прямой AB, и отложим на ней отрезок CD, равный AB, так, чтобы точки B и D лежали по одну сторону от прямой AC (рис. 39, *б*). Так как стороны AB и CD равны и параллельны, то четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм, т. е. точка D искомая.

II. Точка A является соседней с вершиной B и противоположной вершине C. Как и в первом случае, через точку C проведём прямую, параллельную прямой AB, и отложим на ней отрезок CD, равный AB, но теперь так, чтобы точки A и D лежали по одну сторону от прямой BC (рис. 39, *в*). Точка D искомая.

Её можно построить и другим способом: построим середину O отрезка AC, а затем на продолжении отрезка BO за точку O отложим отрезок OD, равный BO (рис. 39, *г*).

III. Точка A является соседней с вершиной C и противоположной вершине B. В этом случае точку D можно построить аналогично тому, как это было сделано в первом случае: через точку B проведём прямую, параллельную прямой AC, и отложим на ней отрезок BD, равный AC, так, чтобы точки A и D лежали по одну сторону от прямой BC (рис. 39, *д*). Точка D искомая. Её можно построить и другим способом, аналогичным второму способу во втором случае.

Ответ: задача имеет три решения.

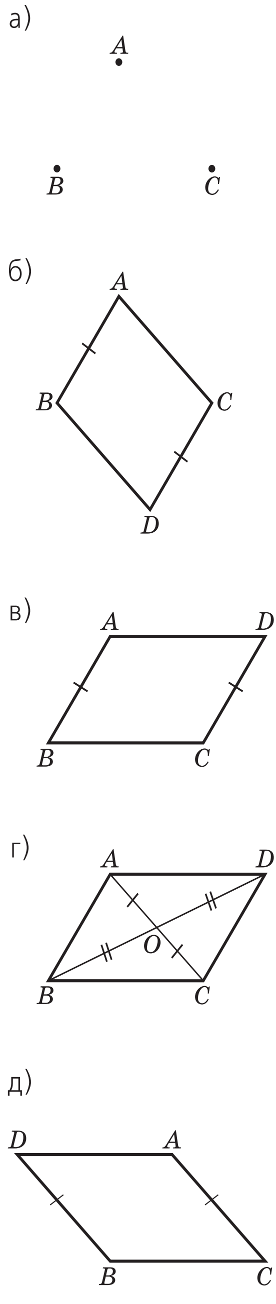


Рис. 39

51.

д) **Дано:** $\triangle ABC$, $AB = BC$, $AL = LN = BM$ (рис. 40).

Доказать: $MN = MC$.

Решение. 1) $\angle A = \angle C$ (поскольку $AB = BC$) и $\angle A = \angle LNA$ (поскольку $AL = LN$), поэтому $\angle LNA = \angle C$.

2) Углы C и LNA соответственные, образованные при пересечении прямых BC и LN секущей AC. Так как эти углы равны, то $BC \parallel LN$.

3) $LN = BM$ (по условию), $LN \parallel BM$, поэтому четырёхугольник $LBMN$ — параллелограмм и, следовательно, $MN \parallel LB$.

4) Так как $MN \parallel AB$, то $\angle MNC = \angle A$ (соответственные углы), а поскольку $\angle A = \angle C$, то $\angle MNC = \angle C$. Отсюда следует, что $MN = MC$, что и требовалось доказать.

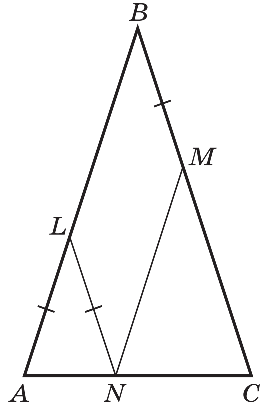


Рис. 40

53.

г) **Дано:** четырёхугольник $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей, $AO = BO$, $CO = DO$, $\angle ACB = \angle CAD$ (рис. 41).

Доказать: четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольник.

Решение. 1) $\triangle AOD = \triangle BOC$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $AD = BC$.

2) $AD \parallel BC$, так как накрест лежащие углы CAD и ACB равны (по условию).

3) Поскольку $AD = BC$ и $AD \parallel BC$, то четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм (по признаку параллелограмма).

4) В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD равны (см. рис. 41), поэтому параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник (по признаку прямоугольника), что и требовалось доказать.

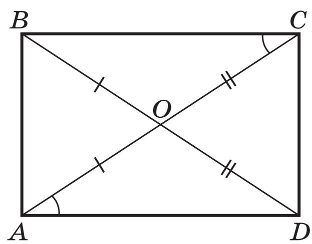


Рис. 41

57.

в) **Дано:** равнобедренная трапеция $ABCD$, $AB = CD$ (рис. 42, *а*).

Доказать: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$, $AC = BD$.

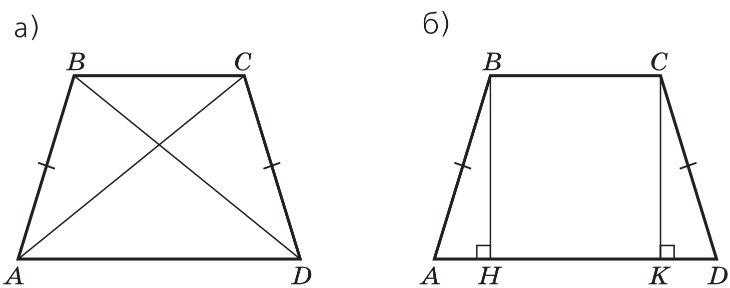


Рис. 42

Решение. 1) Проведём перпендикуляры BH и CK к прямой AD (рис. 42, *б*). Так как $AD \parallel BC$, то $BH = CK$.

2) Прямоугольные треугольники ABH и DCK равны (по гипотенузе и катету), поэтому $\angle A = \angle D$.

3) Углы A и B односторонние, образованные при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AB, поэтому $\angle A + \angle B = 180°$. По аналогичной причине $\angle C + \angle D = 180°$. Так как $\angle A = \angle D$, то из трёх полученных равенств для углов следует, что $\angle B = \angle C$.

4) $\triangle BAD = \triangle CDA$ (по двум сторонам и углу между ними: AD — общая сторона, $AB = CD$, $\angle A = \angle D$), поэтому $BD = AC$, что и требовалось доказать.

л) **Дано:** отрезки P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 (рис. 43, *а*).

Построить: равнобедренную трапецию $ABCD$ с боковой стороной $AB = P_1Q_1$, бо́льшим основанием $AD = P_2Q_2$ и расстоянием между прямыми AD и BC, равным P_3Q_3.

Решение. 1) Проведём прямую и отложим на ней отрезок $AD = P_2Q_2$, а затем построим прямую p, параллельную прямой AD и находящуюся на расстоянии P_3Q_3 от неё (рис. 43, *б*). Как это сделать, мы знаем.

2) Проведём две окружности радиуса P_1Q_1 с центрами A и D и обозначим буквами B и C те точки пересечения этих окружностей с прямой p, для которых основания перпендикуляров BB_1 и CC_1 к прямой AD лежат на отрезке AD (рис. 43, *в*).

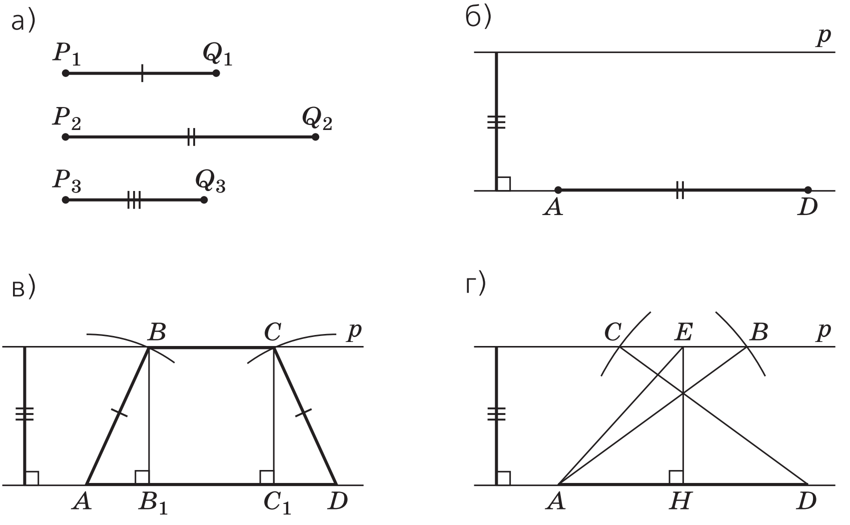


Рис. 43

3) Проведём отрезки AB и CD и получим искомую трапецию $ABCD$. Она по самому построению удовлетворяет всем условиям задачи.

Замечание. Задача имеет решение не для любых данных отрезков. Если $P_1Q_1 < P_3Q_3$, то проведённые окружности не пересекаются с прямой p и задача не имеет решения. Если $P_1Q_1 = P_3Q_3$, то эти окружности касаются прямой p и получается не трапеция, а прямоугольник. Таким образом, должно выполняться неравенство $P_1Q_1 > P_3Q_3$.

Однако этого недостаточно. Может оказаться так, что отрезки AB и DC пересекаются или точки B и C совпадают. Так будет, если заданный отрезок P_1Q_1 не меньше гипотенузы прямоугольного треугольника, катеты которого равны $\frac{1}{2}P_2Q_2$ и P_3Q_3 (треугольник AEH на рис. 43, *г*).

Итак, задача не имеет решения, если не выполнено какое-то из неравенств $P_3Q_3 < P_1Q_1 < AE$.

Проведение этого исследования не является обязательным для учащихся, но наиболее подготовленным из них полезно дать задание провести его.

58.

в) Дано: трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$;
а) $\angle A = \angle D$ (пусть углы A и D — острые, рис. 44, *а*);
б) $AC = BD$ (рис. 44, *б*).

Доказать: в каждом из случаев а) и б) трапеция равнобедренная.

Решение. Проведём перпендикуляры BH и CK к прямой AD (рис. 44, *а*). Так как $AD \parallel BC$, то $BH = CK$.

а) Прямоугольные треугольники ABH и DCK (см. рис. 44, *а*) равны по катету ($BH = CK$) и противолежащему углу ($\angle A = \angle D$ по условию). Поэтому $AB = CD$, что и требовалось доказать.

б) Прямоугольные треугольники ACK и DBH (см. рис. 44, *б*) равны по гипотенузе ($AC = BD$ по условию)

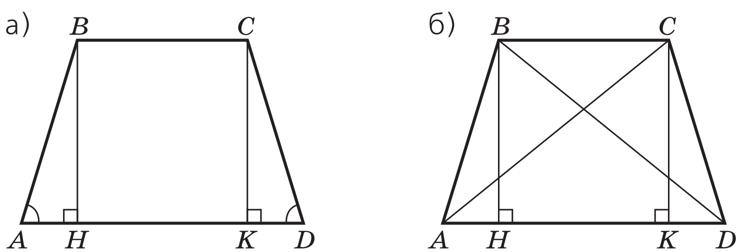


Рис. 44

и катету ($CK = BH$). Поэтому $AK = DH$. Отсюда следует, что $AH = AD - HD = AD - AK = KD$.

Прямоугольные треугольники ABH и DCK равны по двум катетам ($AH = KD$ и $BH = CK$). Поэтому $AB = CD$, что и требовалось доказать.

м) **Дано:** отрезки P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 и P_4Q_4 (рис. 45, *а*).

Построить: трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$ и боковыми сторонами $AB = P_3Q_3$, $CD = P_4Q_4$ (рис. 45, *б*).

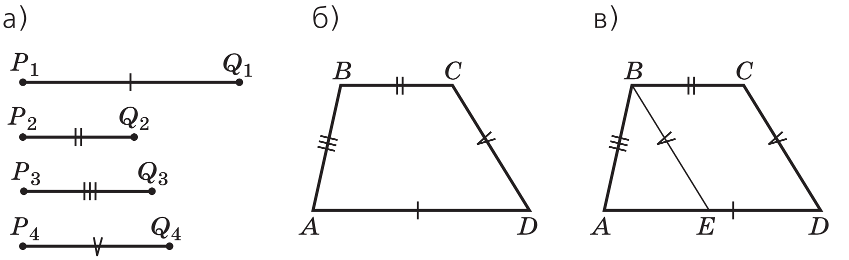


Рис. 45

Решение. Будем считать, что данные отрезки таковы, что задача имеет решение. Проведём отрезок $BE \parallel CD$ (рис. 45, *в*). Тогда четырёхугольник $BCDE$ — параллелограмм, поэтому $ED = BC = P_2Q_2$, $BE = CD = P_4Q_4$, и в треугольнике ABE все стороны выражаются через данные отрезки:

$$AB = P_3Q_3,\ BE = P_4Q_4,\ AE = AD - ED = P_1Q_1 - P_2Q_2. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что искомую трапецию $ABCD$ можно построить так:

1) строим треугольник ABE по трём сторонам, заданным равенствами (1);

2) продолжаем отрезок AE за точку E на отрезок $ED = P_2Q_2$;

3) через точку B проводим прямую, параллельную AD, и откладываем на ней отрезок $BC = P_2Q_2$ так, чтобы точки C и D лежали по одну сторону от прямой BE;

4) проводим отрезок CD и получаем искомую трапецию $ABCD$. Из самого построения следует, что она удовлетворяет всем условиям задачи.

60.

г) **Дано:** $\triangle ABC$, $AB = AC$, AH — высота (рис. 46, *а*).

Доказать: прямая AH является осью симметрии треугольника ABC.

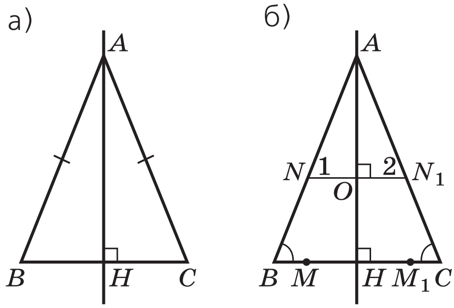


Рис. 46

Решение. Нужно доказать, что для любой точки треугольника ABC симметричная ей относительно прямой AH точка также принадлежит этому треугольнику.

1) Симметричными точкам A и H относительно прямой AH являются сами эти точки; они, очевидно, принадлежат треугольнику ABC.

2) Рассмотрим произвольную точку M, лежащую на основании BC и отличную от точки H (рис. 46, *б*). Так как $BC \perp AH$, то точка M_1, симметричная точке M относительно прямой AH, лежит на прямой BC, а так как $HM_1 = HM$, то точка M_1 лежит на основании BC и, следовательно, принадлежит треугольнику ABC. В частности, симметричной точке B является точка C, и наоборот.

3) Возьмём теперь произвольную точку N, отличную от точек A, B и C, на боковой стороне треугольника, например на стороне AB (рис. 46, *б*). Проведём через точку N прямую, перпендикулярную к прямой AH. Она пересекает прямые AH и AC в некоторых точках O и N_1.

Докажем, что точка N_1, принадлежащая треугольнику ABC, симметрична точке N относительно прямой AH. Для этого нужно доказать, что $ON_1 = ON$.

Так как прямые NN_1 и BC перпендикулярны к прямой AH, то $NN_1 \parallel BC$. Отсюда следует, что $\angle 1 = \angle B$ и $\angle 2 = \angle C$ (соответственные углы), а поскольку $\angle B = \angle C$, то $\angle 1 = \angle 2$. Следовательно, треугольник ANN_1 равнобедренный, поэтому его высота AO является медианой, т. е. $ON_1 = ON$.

Итак, для любой точки треугольника ABC симметричная ей относительно прямой AH точка также принадлежит этому треугольнику, что и требовалось доказать.

61.

д) **Дано:** четырёхугольник $ABCD$, точки P, Q, R и T — середины сторон (рис. 47).
Доказать: четырёхугольник $PQRT$ — параллелограмм.

Решение. 1) Отрезок PQ — средняя линия треугольника ABC, поэтому $PQ \parallel AC$ и $PQ = \frac{1}{2}AC$.

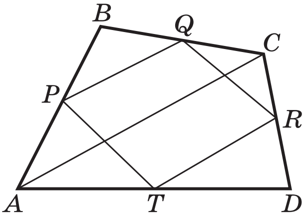


Рис. 47

2) Аналогично отрезок RT — средняя линия треугольника ADC, поэтому $RT \parallel AC$ и $RT = \frac{1}{2}AC$.

3) Из 1) и 2) следует, что $PQ \parallel RT$ и $PQ = RT$, следовательно, четырёхугольник $PQRT$ — параллелограмм, что и требовалось доказать.

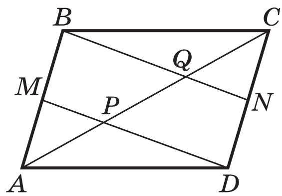


Рис. 48

ж) **Дано:** параллелограмм $ABCD$, M и N — середины сторон AB и CD (рис. 48).

Доказать: $MD \parallel NB$ и $AP = PQ = QC$.

Решение. 1) В параллелограмме $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и равны, поэтому $MB \parallel ND$ и $MB = ND$ (точки M и N — середины равных сторон AB и CD). Так как стороны MB и ND четырёхугольника $MBND$ равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм (по признаку параллелограмма) и, следовательно, $MD \parallel NB$.

2) В треугольнике ABQ отрезок MP проходит через середину M стороны AB и параллелен стороне BQ, поэтому точка P — середина стороны AQ, т. е. $AP = PQ$.

3) Аналогично в треугольнике CDP отрезок NQ проходит через середину N стороны CD и параллелен стороне DP, поэтому $PQ = QC$.

4) Итак, $AP = PQ = QC$, что и требовалось доказать.

63.

г) **Дано:** трапеция $ABCD$, $\angle B = 120°$, $BC = 7$ см, $AB = CD = 8$ см (рис. 49).

Найти: среднюю линию трапеции.

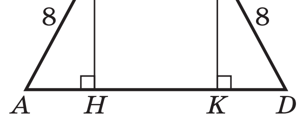


Рис. 49

Решение. Проведём перпендикуляры BH и CK к прямой AD (рис. 49).

1) Угол A треугольника ABH равен $60°$, поскольку $\angle A + \angle ABC = 180°$ (односторонние углы, образованные при пересечении параллель-

ных прямых AD и BC секущей AB) и $\angle ABC = 120°$ (по условию). Поэтому $\angle ABH = 30°$ и $AH = \frac{1}{2}AB = 4$ см (катет, лежащий против угла в 30°).

2) Аналогично из треугольника DCK получаем: $KD = \frac{1}{2}CD = 4$ см.

3) Так как $BH \perp AD$ и $CK \perp AD$, то $BH \parallel CK$ и, следовательно, четырёхугольник $BCKH$ — параллелограмм, а поскольку $\angle BHK = 90°$, то этот параллелограмм — прямоугольник (по признаку прямоугольника). Поэтому $HK = BC = 7$ см.

4) Итак, $BC = 7$ см, $AD = AH + HK + KD = 4$ см $+ 7$ см $+ 4$ см $= 15$ см, а средняя линия трапеции равна $\frac{1}{2}(AD + BC)$, т. е. равна 11 см.

Ответ: 11 см.

д) **Дано:** трапеция $ABCD$, $\angle A = \angle B = 90°$, $AC \perp BD$, $\angle ABD = 60°$ (рис. 50).

Доказать: диагональ AC равна средней линии трапеции.

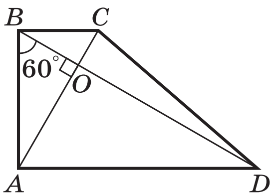


Рис. 50

Решение. 1) Так как $\angle OBC = 90° - 60° = 30°$, то $OC = 0{,}5BC$ (катет, лежащий против угла в 30°).

2) В треугольнике ABD $\angle ADB = 90° - 60° = 30°$, поэтому в треугольнике AOD $AO = \frac{1}{2}AD$ (катет, лежащий против угла в 30°).

3) Итак, $AC = AO + OC = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD + BC)$, т. е. диагональ AC равна средней линии трапеции, что и требовалось доказать.

66.

г) **Дано:** окружность с диаметром AB, $M \notin AB$ (рис. 51, *а*).

Провести: перпендикуляр из точки M к прямой AB с помощью только линейки (не используя циркуль).

Решение. Проведём прямые MA и MB. Они пересекаются с окружностью в точках C и D (рис. 51, *б*). Проведём отрезки AD и BC. Они являются высотами треугольника AMB, поскольку $\angle ADB = \angle ACB = 90°$ (это вписанные углы, опирающиеся на полуокружность). Точка H пересечения прямых AD и BC — ортоцентр треугольника AMB, поэтому отрезок ME прямой, проходящей через точку H

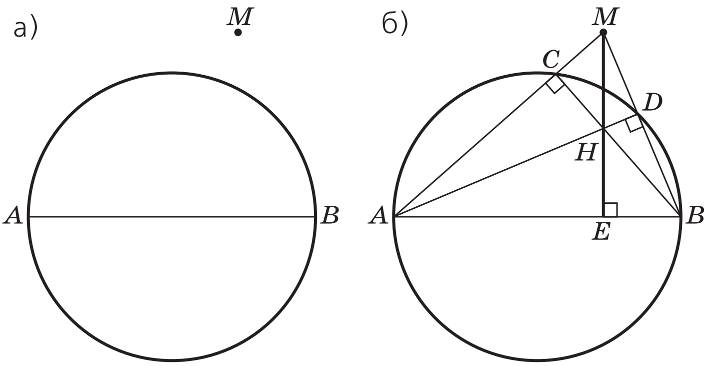


Рис. 51

(см. рис. 51, *б*), является высотой треугольника AMB, проведённой к стороне AB, т. е. отрезок ME — искомый перпендикуляр, проведённый из точки M к прямой AB.

Итак, для построения перпендикуляра, проведённого из точки M к прямой AB, нужно провести последовательно пять прямых: MA, MB, BC, AD и MH, что делается с помощью только линейки (без использования циркуля).

71.

Вопрос: существует ли многоугольник с 27 диагоналями?

Решение. Число всех диагоналей n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$ (задача 43 е)). Приравняем это выражение двадцати семи: $\frac{n(n-3)}{2} = 27$. Получилось уравнение для n, которое можно записать в виде $n^2 - 3n - 54 = 0$ или $(n + 6)(n - 9) = 0$. Этому уравнению удовлетворяют числа $n = -6$ и $n = 9$. Но число n должно быть натуральным, поэтому $n = -6$ не подходит. Итак, $n = 9$, т. е. девятиугольник имеет 27 диагоналей.

Ответ: да, девятиугольник.

75.

Дано: выпуклый четырёхугольник $ABCD$ (рис. 52).

Доказать:

$$\frac{1}{2}P < AC + BD < P, \qquad (1)$$

где $P = AB + BC + CD + DA$ — периметр четырёхугольника.

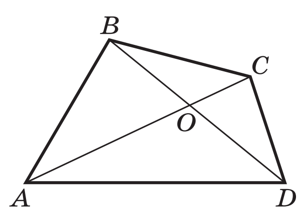


Рис. 52

Решение. Запишем неравенства треугольника применительно к треугольникам ABC, ADC, ABD и BCD: $AC < AB + BC$, $AC < CD + DA$, $BD < AB + DA$, $BD < BC + CD$.

Складывая эти неравенства, получаем $2AC + 2BD < 2(AB + BC + CD + DA) = 2P$, откуда после сокращения на 2 приходим к правому неравенству из (1):

$$AC + BD < P.$$

Запишем теперь неравенства треугольника применительно к треугольникам AOB, BOC, COD и DOA:

$$AB < AO + BO,\ BC < BO + OC,$$
$$CD < OC + OD,\ DA < AO + OD.$$

Складывая эти неравенства, получаем $AB + BC + CD + DA < 2(AO + OC) + 2(BO + OD) = 2(AC + BD)$.

Разделив на 2 и учитывая, что сумма в левой части неравенства равна периметру P, приходим к левому неравенству из (1): $AC + BD > \frac{1}{2}P$.

76.

Дано: четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O (рис. 53).

Найти: $\angle AOD + \angle BOC$.

Решение. 1) Проведём радиусы OH и OK, где H и K — точки касания окружности со сторонами AB и AD (см. рис. 53).

Отрезки касательных AH и AK образуют равные углы с лучом AO, т. е. луч AO — биссектриса угла A.

Аналогично доказывается, что лучи BO, CO и DO — биссектрисы углов B, C и D.

2) В треугольнике AOD

$$\angle AOD = 180° - (\angle OAD + \angle ODA) = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle D).$$

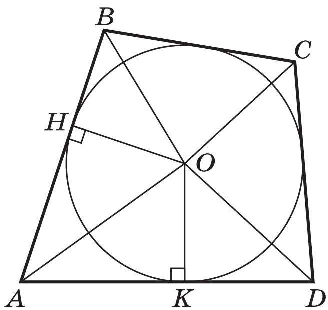


Рис. 53

Аналогично в треугольнике BOC

$$\angle BOC = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C).$$

3) Складывая полученные равенства и учитывая, что сумма углов четырёхугольника $ABCD$ равна 360°, приходим к равенству

$$\angle AOD + \angle BOC = 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 180°.$$

Ответ: 180°.

Замечание. В ходе решения задачи мы установили, что биссектрисы углов описанного четырёхугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной в четырёхугольник окружности.

83.

Дано: правильный десятиугольник $A_1A_2 \ldots A_{10}$ вписан в окружность с центром O; диагонали A_1A_4 и A_2A_7 пересекаются в точке M (рис. 54).

Доказать: треугольники A_1A_2M и MA_4O — равнобедренные.

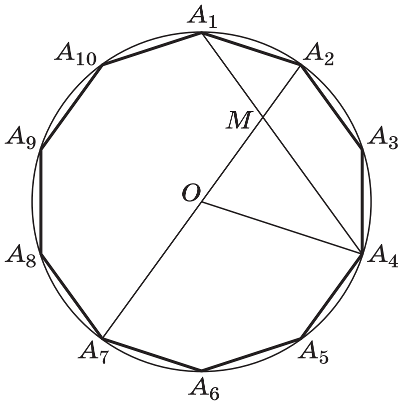


Рис. 54

Решение. Обозначим для краткости записи буквой α градусную меру дуги, стягиваемой одной из сторон правильного десятиугольника, т. е. $\alpha = 36°$. Заметим, что хорда A_2A_7 является диаметром, так как стягивает полуокружность.

1) Так как $\angle A_1A_2A_7 = \frac{1}{2} \smile A_1A_{10}A_7 = 2\alpha$ (вписанный угол) и $\angle A_1MA_2 = \frac{1}{2}(\smile A_1A_2 + \smile A_4A_7) = 2\alpha$ (угол с вершиной внутри круга), то углы A_2 и M треугольника A_1A_2M равны, поэтому этот треугольник равнобедренный ($A_1M = A_1A_2$).

2) Аналогично, так как $\angle A_4MO = \angle A_1MA_2 = 2\alpha$ (вертикальные углы) и $\angle A_4OA_2 = \smile A_2A_3A_4 = 2\alpha$ (центральный угол), то в треугольнике MA_4O углы M и O равны, поэтому этот треугольник равнобедренный ($A_4M = OA_4$), что и требовалось доказать.

84.

Дано: правильный десятиугольник $A_1A_2 \ldots A_{10}$ вписан в окружность радиуса R (см. рис. 54).

Доказать: $A_1A_4 - A_1A_2 = R$.

Решение. В ходе решения задачи 83 установлено, что $A_1M = A_1A_2$ и $A_4M = OA_4$. Так как $OA_4 = R$, то $A_4M = R$. Отсюда следует (см. рис. 54), что $A_1A_4 - A_1A_2 = A_1A_4 - A_1M = A_4M = R$. Итак,

$$A_1A_4 - A_1A_2 = R,$$

что и требовалось доказать.

87.

Дано: отрезок PQ (рис. 55, *а*).

Построить: правильный восьмиугольник, сторона которого равна PQ.

Решение. Предположим, что искомый восьмиугольник $A_1A_2 \dots A_8$ построен. Рассмотрим описанную около него окружность и соединим её центр O с вершинами восьмиугольника (рис. 55, *б*). Получатся восемь равных равнобедренных треугольников, у каждого из которых основание равно стороне восьмиугольника, т. е. равно данному отрезку PQ, а противолежащий угол равен 45°.

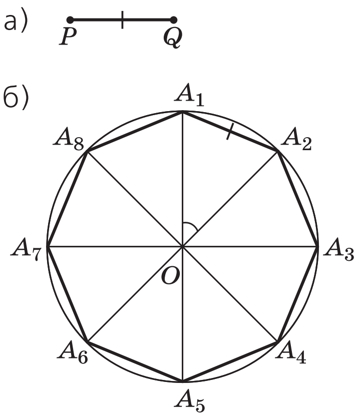


Рис. 55

Отсюда следует, что искомый восьмиугольник можно построить так:

1) построим угол в 45° (как это сделать, мы знаем);

2) построим равнобедренный треугольник A_1OA_2 по основанию $A_1A_2 = PQ$ и противолежащему углу, равному построенному углу в 45° (как это сделать, мы также знаем);

3) проведём окружность с центром O радиуса OA_1;

4) с помощью циркуля отметим на окружности последовательно точки $A_3, A_4, \dots, A_8$ так, что

$$A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_7A_8 = A_1A_2.$$

Восьмиугольник $A_1A_2 \dots A_8$ — искомый.

99.

Дано: параллелограмм $ABCD$, $BO = OP$ (рис. 56).

Доказать: $BP \perp AD$.

Решение. Так как $OD = OB = OP$, то окружность с диаметром BD является описанной около треугольника BPD и, следовательно, вписанный угол BPD опирается на полуокружность. Поэтому $\angle BPD = 90°$, т. е. $BP \perp AD$, что и требовалось доказать.

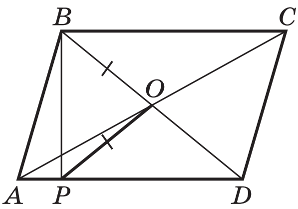


Рис. 56

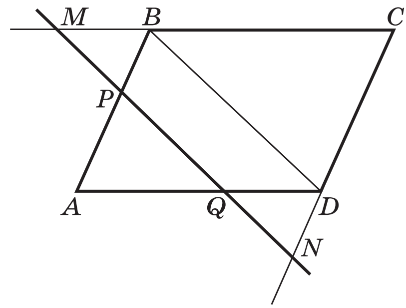


Рис. 57

100.

Дано: параллелограмм $ABCD$, $MN \parallel BD$ (рис. 57).

Доказать: $MP = NQ$.

Решение. 1) Так как $MB \parallel QD$ и $MQ \parallel BD$, то четырёхугольник $MBDQ$ — параллелограмм, поэтому $MB = QD$.

2) $\triangle MBP = \triangle QDN$ по стороне ($MB = QD$) и прилежащим к ней углам ($\angle BMP = \angle DQN$ — соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых MB и QD секущей MN; $\angle MBP = \angle QDN$ — углы, смежные с равными углами ABC и ADC). Отсюда следует, что $MP = NQ$, что и требовалось доказать.

102.

Дано: четырёхугольник $ABCD$, диагонали AC и BD пересекаются в точке O, $BO = OD$, $AO > OC$ (рис. 58, *а*).

Доказать: $\angle A < \angle C$.

Решение. 1) Отложим на луче OA отрезок $OE = OC$. Так как $AO > OC$, то точка E будет лежать между точками A и O (рис. 58, *б*). Диагонали четырёхугольника $BCDE$ точкой пересечения делятся пополам, поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм и $\angle BED = \angle C$ (противоположные углы параллелограмма равны).

2) Угол BEO — внешний угол треугольника ABE, поэтому $\angle BEO > \angle BAE$. Аналогично $\angle OED > \angle EAD$. Складывая эти два неравенства, по-

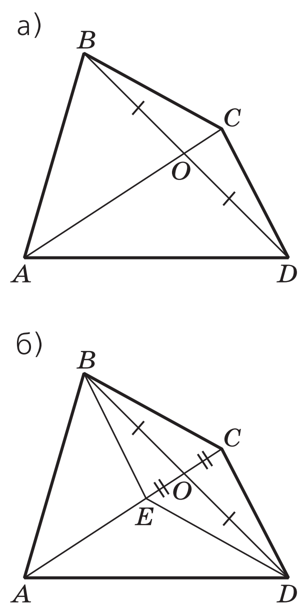


Рис. 58

лучаем $\angle BEO + \angle OED > \angle BAE + \angle EAD$, т. е. $\angle BED > \angle A$, а поскольку $\angle BED = \angle C$, то $\angle C > \angle A$, что и требовалось доказать.

111.

Дано: произвольный четырёхугольник $ABCD$ (рис. 59, *а*).

Доказать: любую часть плоскости можно целиком покрыть (замостить) четырёхугольниками, равными данному четырёхугольнику $ABCD$, прикладывая их плотно друг к другу (приведённая формулировка задачи немного отличается по форме от формулировки в учебнике, где говорится о плитках, но под плиткой подразумевается четырёхугольник, равный данному).

Решение. 1) Проведём прямую, содержащую ту диагональ четырёхугольника, которая разделяет его на два треугольника. Взятый нами четырёхугольник $ABCD$ невыпуклый, его разделяет на два треугольника (ABC и ADC) только диагональ AC (рис. 59, *б*). Эти и соответственно равные им треугольники обозначим цифрами 1 и 2.

2) Через точки B и D проведём прямые b_1 и d_1, параллельные AC. Расстояние между прямыми b_1 и AC обозначим h_b, а расстояние между прямыми d_1 и AC обозначим h_d. Затем проведём прямые b_2 и d_2, параллельные b_1 и d_1, так, чтобы расстояние между прямыми b_1 и b_2 равнялось h_d, а расстояние между прямыми d_1 и d_2 равнялось h_b (см. рис. 59, *б*). Продолжая этот процесс, мы получим множество параллельных прямых, причём расстояния между соседними прямыми принимают значения h_b или h_d и чередуются.

3) Каждую полосу между соседними прямыми замостим треугольниками вида 1 или 2 так, как показано на рисунке 59, *б*. В результате вся плоскость и, следовательно,

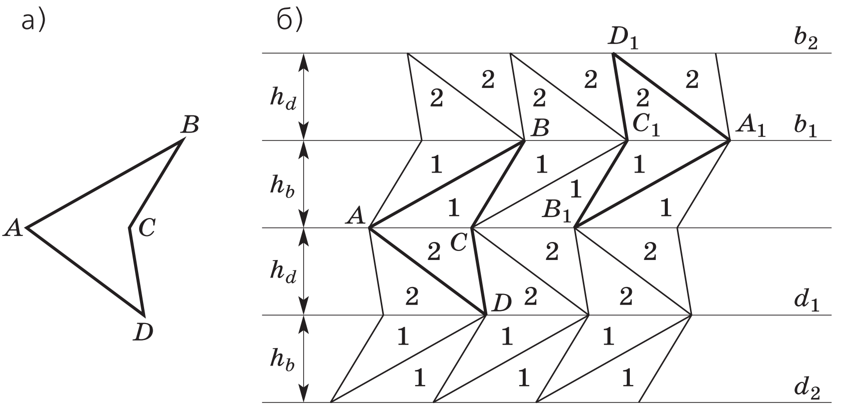


Рис. 59

любая её часть будут целиком покрыты четырёхугольниками, равными четырёхугольнику $ABCD$. Часть этих четырёхугольников расположена так же, как четырёхугольник $ABCD$ (вершина, соответствующая вершине A, лежит слева от вершины, соответствующей C), а у другой части четырёхугольников расположение вершин, соответствующих A и C, обратное (например, у четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$).

114.

Дано: параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O (рис. 60).

Доказать: точка O — центр симметрии параллелограмма $ABCD$.

Решение. Требуется доказать, что для любой точки параллелограмма $ABCD$ симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этому параллелограмму.

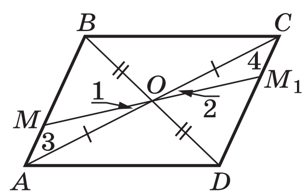


Рис. 60

Точки A и C и также точки B и D, очевидно, симметричны относительно точки O.

Возьмём произвольную точку M параллелограмма, отличную от его вершин (пусть, например, точка M взята на стороне AB, рис. 60), и проведём прямую MO. Она пересекает сторону CD в некоторой точке M_1. Докажем, что точка M_1 симметрична точке M относительно точки O. Для этого нужно доказать, что $OM_1 = OM$.

Треугольники COM_1 и AOM равны по стороне ($AO = OC$) и прилежащим к ней углам (углы 1 и 2 равны как вертикальные, а углы 3 и 4 равны как накрест лежащие, образованные при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC). Отсюда следует, что $OM_1 = OM$.

Итак, для любой точки параллелограмма $ABCD$ симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этому параллелограмму, т. е. точка O — центр симметрии параллелограмма, что и требовалось доказать.

116.

Дано: a и b — взаимно перпендикулярные оси симметрии (рис. 61).

Доказать: фигура имеет центр симметрии.

Решение. Докажем, что точка O пересечения осей симметрии a и b является центром симметрии фигуры.

1) Пусть M — произвольная точка фигуры, не лежащая на осях a и b (рис. 61, a). Так как прямая a — ось симметрии фигуры, то точка M_1, симметричная точке M отно-

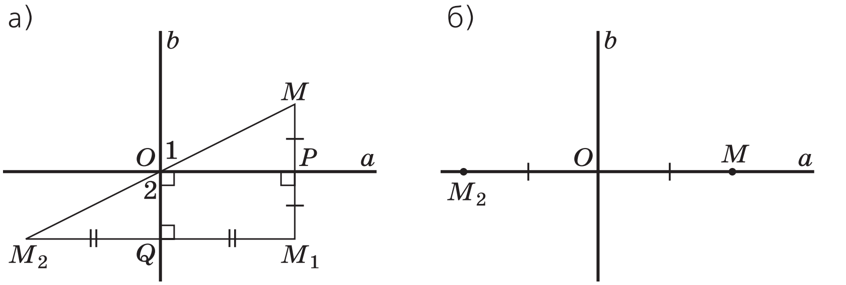


Рис. 61

сительно оси a, принадлежит этой фигуре, и также точка M_2, симметричная точке M_1 относительно оси b, принадлежит фигуре.

Докажем, что точка M_2 симметрична точке M относительно точки O. Для этого нужно доказать, что точка O — середина отрезка MM_2.

2) Обозначим буквами P и Q середины отрезков MM_1 и M_1M_2 (см. рис. 61, *а*). В четырёхугольнике OPM_1Q три угла (O, P и Q) прямые, поэтому этот четырёхугольник — прямоугольник и, следовательно, $OQ = PM_1$ и $OP = QM_1$, а так как $PM_1 = PM$ и $QM_1 = QM_2$, то $OQ = PM$ и $QM_2 = OP$.

3) Прямоугольные треугольники OPM и M_2QO равны по двум катетам ($MP = OQ$ и $OP = M_2Q$), поэтому $OM = OM_2$ и $\angle MOP = \angle OM_2Q$. Из последнего равенства следует, что $\angle 1 = 90° - \angle MOP = 90° - \angle OM_2Q = \angle 2$ и, следовательно, углы 1 и 2 вертикальные. Это означает, что отрезок OM_2 является продолжением отрезка OM за точку O. Таким образом, точка O является серединой отрезка MM_2, и тем самым доказано, что точка, симметричная точке M фигуры относительно точки O, также принадлежит этой фигуре.

4) Если точка M лежит на какой-то из осей a и b, например на оси a (рис. 61, *б*), то симметричная ей точка относительно точки O (точка M_2 на рис. 61, *б*) является также точкой, симметричной M относительно оси b, и, следовательно, точка M_2 принадлежит фигуре.

Итак, для любой точки M фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит фигуре. Это и означает, что точка O — центр симметрии фигуры, что и требовалось доказать.

117.

а) Дано: правильный $2n$-угольник $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ с центром O (рис. 62).

Доказать: точка O — центр симметрии данного $2n$-угольника.

Решение. Проведём окружность с центром O, описанную около данного $2n$-угольника. Для каждой вершины $2n$-угольника симметричной относительно точки O является диаметрально противоположная вершина, например, для вершин A_1 и A_2 симметричными относительно точки O являются вершины A_{n+1} и A_{n+2} (см. рис. 62).

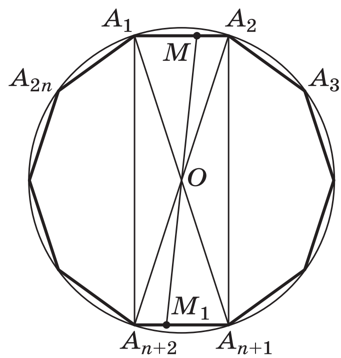


Рис. 62

Возьмём произвольную точку M правильного $2n$-угольника, не совпадающую с вершиной. Пусть, например, она лежит на стороне A_1A_2, как на рисунке 62. Четырёхугольник $A_1A_2A_{n+1}A_{n+2}$ является прямоугольником, поскольку все его углы прямые. Поэтому, согласно утверждению задачи 114, точка M_1, симметричная точке M относительно точки O, лежит на стороне $A_{n+1}A_{n+2}$.

Итак, для любой точки правильного $2n$-угольника симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этому $2n$-угольнику, т. е. точка O — центр симметрии правильного $2n$-угольника, что и требовалось доказать.

123.

Дано: $\triangle ABC$, MN — его средняя линия, AK — медиана, O — точка пересечения прямых MN и AK (рис. 63, *а*).

Доказать: а) $AO = OK$; б) $MO = ON$.

Решение. Проведём средние линии NK и MK (рис. 63, *б*). По свойству средней линии треугольника $NK = \frac{1}{2}AB = AM$ и $NK \parallel AM$. Следовательно, четырёхугольник $ANKM$ — параллелограмм (по признаку параллелограмма). Его диагонали точкой пересечения делятся пополам: $AO = OK$ и $MO = ON$, что и требовалось доказать.

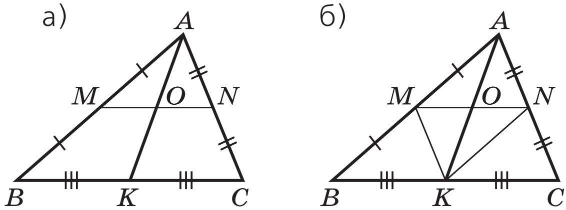


Рис. 63

126.

Дано: $\triangle ABC$, точка O — середина медианы AA_1, D — точка пересечения прямых AC и BO (рис. 64, *а*).

Доказать: $AD = \frac{1}{3}AC$.

Решение. Проведём отрезок $A_1E \parallel BD$ (рис. 64, *б*). Согласно следствию из теоремы о средней линии треугольника, прямая BD, проходящая через середину O стороны AA_1 треугольника AA_1E и параллельная стороне A_1E, делит сторону AE пополам, т. е. $AD = DE$. По аналогичной причине прямая A_1E делит отрезок DC треугольника BCD пополам, т. е. $DE = EC$. Из двух полученных равенств следует, что $AD = \frac{1}{3}AC$.

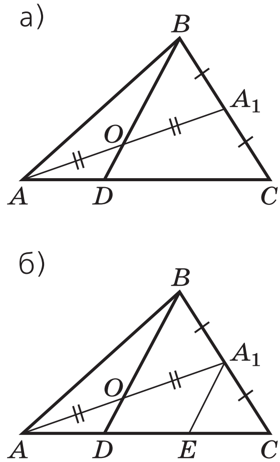


Рис. 64

128.

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 65, *а*).

Построить: $\triangle AA_1A_2$, в котором сторона AA_1 является медианой треугольника ABC, а две другие стороны соответственно равны двум другим медианам треугольника ABC и параллельны им.

Вопрос: сколько решений имеет эта задача?

Решение. Построим середины A_1 и B_1 сторон BC и AC и проведём медианы AA_1 и BB_1 (рис. 65, *б*). Затем построим луч с началом A_1, параллельный прямой BB_1 и пересекающий отрезок AC, и отложим на нём отрезок $A_1A_2 = BB_1$. Проведя отрезок AA_2, получим треугольник AA_1A_2. Докажем, что он искомый.

Обозначим буквой M точку пересечения отрезков A_1A_2 и AC, через C_1 — середину отрезка AB (рис. 65, *в*). Так как точка A_1 — середина стороны BC и $A_1M \parallel BB_1$ (по построению), то точка M — середина стороны B_1C треугольника BB_1C (согласно следствию из теоремы о средней линии треугольника) и $A_1M = 0{,}5BB_1$ (по теореме о средней линии треугольника), а поскольку $A_1A_2 = BB_1$ (по построению), то $A_1M = 0{,}5A_1A_2$, т. е. точка M — середина отрезка A_1A_2. Таким образом, в четырёхугольнике $B_1A_1CA_2$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм и, следовательно, $CA_2 = A_1B_1$ и $CA_2 \parallel A_1B_1$.

С другой стороны, поскольку отрезок A_1B_1 — средняя линия треугольника ABC, то $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB = C_1A$ и $A_1B_1 \parallel C_1A$. Из полученных соотношений следует, что $CA_2 = C_1A$ и $CA_2 \parallel C_1A$, т. е. в четырёхугольнике CA_2AC_1 противоположные стороны равны и параллельны. Поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм и, следовательно, $A_2A = CC_1$ и $A_2A \parallel CC_1$.

Итак, в построенном треугольнике AA_1A_2 сторона AA_1 является медианой треугольника ABC, а стороны A_1A_2 и A_2A соответственно равны и параллельны медианам BB_1 и CC_1 треугольника ABC, т. е. треугольник AA_1A — искомый.

Задача имеет два решения. Второй искомый треугольник можно построить так: построим середины A_1 и C_1 сторон BC и AB треугольника ABC; затем построим луч с началом A_1, параллельный прямой CC_1 и пересекающий отрезок AB, и отложим на нём отрезок $A_1A_2' = CC_1$ (рис. 65, *г*). Проведя отрезок AA_2', получим треугольник AA_1A_2'. Доказательство того, что он удовлетворяет всем условиям задачи, проводится так же, как в отношении треугольника AA_1A_2.

Ответ: задача имеет два решения.

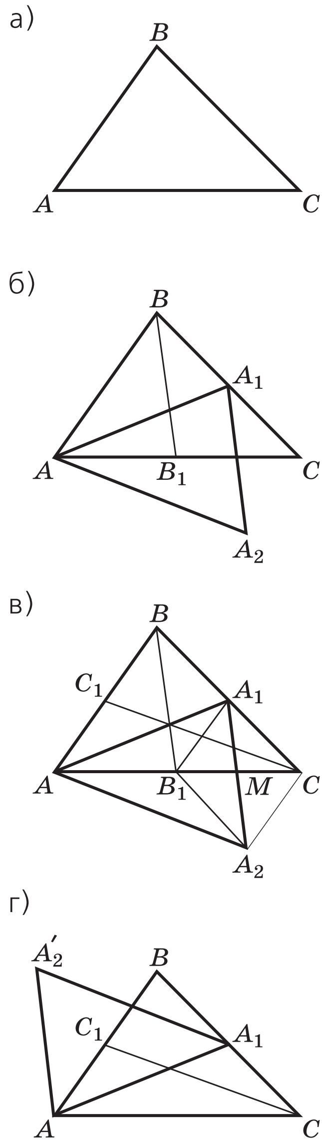


Рис. 65

129.

Дано: три отрезка: P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 (рис. 66, *а*).

Построить: треугольник, медианы которого соответственно равны данным отрезкам.

Решение. Предположим, что искомый треугольник ABC, в котором медианы AA_1, BB_1 и CC_1 равны соответственно данным отрезкам P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3, построен (рис. 66, *б*). Обозначим буквой M точку пересечения медиан. Тогда $MA_1 = \frac{1}{3}AA_1 = \frac{1}{3}P_1Q_1$, $BM = \frac{2}{3}BB_1 =$

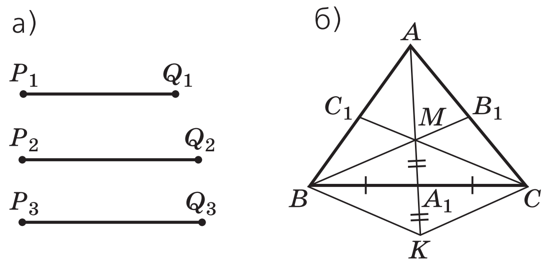


Рис. 66

$= \dfrac{2}{3} P_2Q_2$, $CM = \dfrac{2}{3} CC_1 = \dfrac{2}{3} P_3Q_3$. Продолжим отрезок MA_1 за точку A_1 на отрезок $A_1K = MA_1 = \dfrac{1}{3} P_1Q_1$. Четырёхугольник $BMCK$ — параллелограмм (поскольку его диагонали BC и MK точкой пересечения делятся пополам, см. рис. 66, *б*), поэтому $BK = CM = \dfrac{2}{3} P_3Q_3$. Отсюда следует, что искомый треугольник ABC можно построить так:

1) делим каждый из данных отрезков P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 на три равные части;

2) строим треугольник BMK по трём сторонам: $BM = \dfrac{2}{3} P_2Q_2$, $MK = \dfrac{2}{3} P_1Q_1$ и $BK = \dfrac{2}{3} P_3Q_3$;

3) строим середину A_1 отрезка MK, проводим луч BA_1 и откладываем на нём отрезок $BC = 2BA_1$;

4) на луче A_1M откладываем отрезок $A_1A = P_1Q_1$;

5) проводим отрезки AB и AC и получаем искомый треугольник ABC.

Действительно, в этом треугольнике медиана AA_1 равна P_1Q_1 (по построению), точка M лежит на медиане AA_1 и делит её в отношении $2 : 1$, считая от вершины A, поэтому точка M является точкой пересечения медиан треугольника ABC, а поскольку $BM = \dfrac{2}{3} P_2Q_2$ и $CM = BK = \dfrac{2}{3} P_3Q_3$ (по построению), то медиана BB_1 равна P_2Q_2, а медиана CC_1 равна P_3Q_3. Итак, построенный треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Глава 6

131.

е) Дано: отрезок MN (рис. 67, *а*).

Построить: точку K на отрезке MN, такую, что $MK : KN = 4 : 3$.

Решение. Разделим отрезок MN на семь равных отрезков точками K_1, K_2, ..., K_6 (рис. 67, *б*). Как это сделать, мы знаем. Очевидно, что $MK_4 = 4MK_1$, а $K_4N = 3MK_1$. Поэтому $MK_4 : K_4N = 4 : 3$. Следовательно, искомой точкой K является точка K_4.

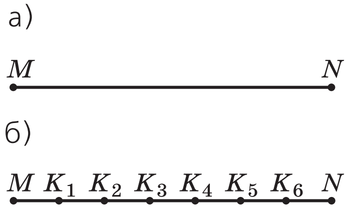


Рис. 67

133.

б) Найти: $\sin 30°$, $\cos 30°$, $\sin 60°$, $\cos 60°$.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (рис. 68).

По определению синуса острого угла прямоугольного треугольника $\sin A = \sin 30° = \dfrac{BC}{AB}$. Так как $BC = \dfrac{1}{2}AB$ (катет, лежащий против угла в 30°), то $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$.

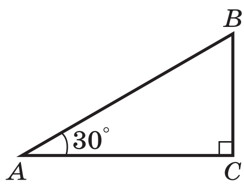


Рис. 68

Используя основное тригонометрическое тождество и формулы приведения, получаем:

$$\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 60° = \cos(90° - 60°) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60° = \sin(90° - 60°) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$.

е) Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, CH — высота (рис. 69).

Доказать: $AC^2 = AB \cdot AH$.

Решение. Для прямоугольных треугольников ABC и ACH справедливы равенства $AC = AB \cdot \cos A$ и $AH = AC \cdot \cos A$. Из второго равенства следует, что $AC = \dfrac{AH}{\cos A}$. Перемножая два равенства для AC, получаем $AC^2 = AB \cdot \cos A \cdot \dfrac{AH}{\cos A} = AB \cdot AH$, что и требовалось доказать.

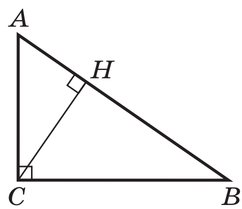


Рис. 69

и) Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, CD — высота треугольника (рис. 70).

Доказать: $CD \cdot AB = AC \cdot BC$.

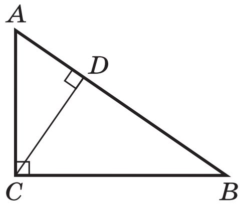


Рис. 70

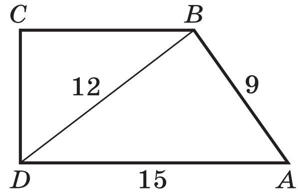


Рис. 71

Решение. Для прямоугольных треугольников ACD и ABC справедливы равенства $CD = AC \cdot \sin A$ и $BC = AB \cdot \sin A$. Умножая первое равенство на AB, а второе на AC, получаем:

$$CD \cdot AB = AC \cdot AB \cdot \sin A$$

и

$$AC \cdot BC = AC \cdot AB \cdot \sin A,$$

откуда следует искомое равенство $CD \cdot AB = AC \cdot BC$.

134.

б) Найти: $\sin 45°$ и $\cos 45°$.

Решение. По формуле приведения $\cos 45° = \sin(90° - 45°) = \sin 45°$, а согласно основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1$. Поэтому $2\sin^2 45° = 1$, откуда $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

135.

в) **Дано:** трапеция $ABCD$, $\angle C = \angle D = 90°$, $AB = 9$, $BD = 12$, $AD = 15$ (рис. 71).

Найти: $\sin\angle CBD$ и $\cos\angle CBD$.

Решение. 1) Так как $AD^2 = AB^2 + BD^2$ (действительно, $15^2 = 9^2 + 12^2$), то $\sin\angle ADB = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ и $\cos\angle ADB = \frac{4}{5}$.

2) $\angle CBD = \angle ADB$ (накрест лежащие углы, образованные при пересечении прямых BC и AD секущей BD), поэтому $\sin\angle CBD = \sin\angle ADB = \frac{3}{5}$ и $\cos\angle CBD = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$.

д) **Дано:** остроугольный треугольник ABC, BH — его высота (рис. 72).

Доказать: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$.

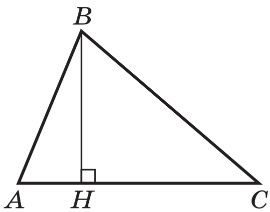


Рис. 72

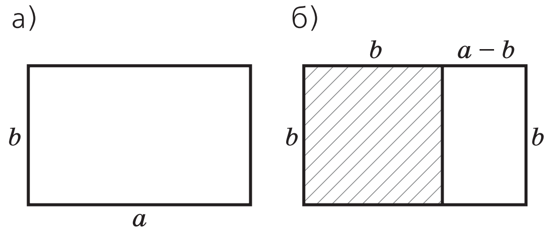


Рис. 73

Решение. Так как углы A и C острые, то точка H лежит на стороне AC, а не на её продолжении (в противном случае получился бы треугольник с прямым и тупым углом, чего не может быть).

По теореме Пифагора применительно к треугольникам ABH и BCH получаем:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2,\ BC^2 = BH^2 + HC^2.$$

Используя первое равенство и тот факт, что $HC = AC - AH$, запишем второе равенство в виде

$$BC^2 = AB^2 - AH^2 + (AC - AH)^2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, приходим к искомому равенству:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH.$$

е) **Дано:** прямоугольник, стороны которого a и b образуют золотое сечение: $\frac{b}{a} = \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (рис. 73, *а*).

Доказать: если отрезать от данного прямоугольника квадрат со стороной b, то смежные стороны оставшегося прямоугольника будут также образовывать золотое сечение.

Решение. Если отрезать квадрат со стороной b, то останется прямоугольник со смежными сторонами $a - b$ и b (рис. 73, *б*). Докажем, что $\frac{a-b}{b} = \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Из условия задачи следует, что $a = \frac{b}{\varphi}$, поэтому $\frac{a-b}{b} = \frac{1}{\varphi} - 1 = \frac{2}{\sqrt{5}-1} - 1$. Умножив числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{5}+1)$, получим:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi.$$

Итак, смежные стороны оставшегося прямоугольника образуют золотое сечение, что и требовалось доказать.

136.

в) **Дано:** окружность вписана в прямоугольную трапецию $ABCD$, $AB \perp AD$, $BC = 3$, $AD = 6$ (рис. 74).

Найти: радиус r окружности.

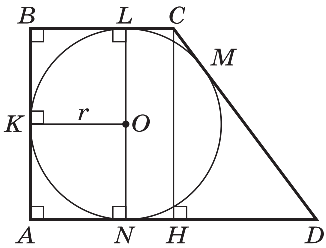


Рис. 74

Решение. Обозначим центр окружности буквой O, точки касания окружности со сторонами трапеции — буквами K, L, M, N и проведём перпендикуляр CH к прямой AD (рис. 74). Тогда $BL = OK = AN = r$, $AH = BC = 3$, $CH = LN = 2r$ (от учащихся нужно требовать обоснования справедливости этих равенств), поэтому $CL = 3 - r$, $DN = 6 - r$, $HD = 6 - 3 = 3$. Так как $CM = CL$ и $DM = DN$ (отрезки касательных, проведённые из одной точки), то $CD = CM + DM = CL + DN = 9 - 2r$.

По теореме Пифагора применительно к треугольнику CHD получаем:

$$CD^2 = CH^2 + HD^2, \text{ т. е. } (9 - 2r)^2 = (2r)^2 + 9.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, найдём: $r = 2$.

Ответ: 2.

137.

а) **Найти:** синус и косинус углов в 120°, 135°, 150°.

Решение. Воспользуемся формулами приведения

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

С их помощью получим:

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2},$$

$$\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2},$$

$$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

г) **Найти:** тангенс и котангенс углов в 30°, 45°, 60°, 120°, 135°, 150°.

Решение. Используя определения тангенса и котангенса, а также значения синуса и косинуса для указанных углов, получаем:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \operatorname{tg} 45^\circ = 1,\ \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3},\ \operatorname{tg} 135^\circ = -1,\ \operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3},\ \operatorname{ctg} 45^\circ = 1,\ \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \operatorname{ctg} 135^\circ = -1,\ \operatorname{ctg} 150^\circ = -\sqrt{3}.$$

з) **Дано:** $\triangle ABC$, $AB = BC$, $\angle A = 2\alpha$, $AC = b$ (рис. 75).
Найти: биссектрису AD.

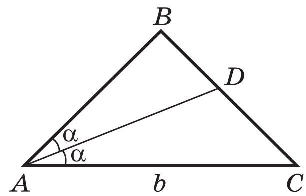


Рис. 75

Решение. 1) Так как треугольник ABC равнобедренный, то $\angle C = \angle A = 2\alpha$, поэтому $\angle ADC = 180^\circ - (\angle DAC + \angle C) = 180^\circ - 3\alpha$.

2) По теореме синусов применительно к треугольнику ADC получаем: $\frac{AD}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - 3\alpha)}$. Отсюда, учитывая, что $AC = b$ (по условию) и $\sin(180^\circ - 3\alpha) = \sin 3\alpha$ (по формуле приведения), находим $AD = \frac{b \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$.

Ответ: $\frac{b \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$.

139.

а) **Вопрос:** остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник, стороны которого равны: 2, 3 и 4; 4, 5 и 6; 1, 2 и $\sqrt{3}$?

Решение. Рассмотрим треугольник со сторонами, равными a, b и c ($a < b < c$), и обозначим буквой α величину наибольшего угла треугольника. Треугольник является остроугольным, прямоугольным или тупоугольным, если соответственно $\alpha < 90^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ или $\alpha > 90^\circ$. В свою очередь, эти соотношения выполняются тогда, когда соответственно $\cos\alpha > 0$, $\cos\alpha = 0$ или $\cos\alpha < 0$. Учитывая, что наибольший угол треугольника лежит против наибольшей стороны, с помощью теоремы косинусов найдём $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Поскольку знаменатель этой дроби положителен, то её знак определяется знаком числителя.

В первом случае $2^2 + 3^2 - 4^2 < 0$, следовательно, $\alpha > 90°$ и треугольник тупоугольный. Аналогично устанавливаем, что во втором случае $\cos\alpha > 0$, а в третьем $\cos\alpha = 0$. Поэтому во втором случае треугольник остроугольный, а в третьем — прямоугольный.

Ответ: тупоугольный; остроугольный; прямоугольный.

141.

б) **Дано:** $\triangle ABC$, $AB = BC = 5$, $AC = 8$ (рис. 76, *а*).

Найти: радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. 1) Используя теорему косинусов, находим:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{25 + 25 - 64}{2 \cdot 5 \cdot 5} = -\frac{7}{25}.$$

2) С помощью основного тригонометрического тождества вычисляем $\sin B$: $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \frac{24}{25}$.

3) Так как $AC = 2R\sin B$, где R — радиус описанной окружности, то $R = \frac{AC}{2\sin B} = \frac{25}{6}$.

Ответ: $\frac{25}{6}$.

Замечание. Можно найти $\sin B$ другим способом. Проведём высоту BH треугольника ABC (рис. 76, *б*). Так как треугольник равнобедренный, то она является медианой и биссектрисой. Следовательно, $\sin\frac{B}{2} = \frac{HC}{BC} = \frac{4}{5}$, $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{B}{2}} = \frac{3}{5}$, $\sin B = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = \frac{24}{25}$.

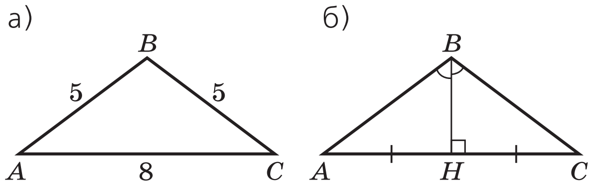


Рис. 76

г) **Дано:** $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AC = 21$, $BC = 28$, CD — биссектриса (рис. 77).

Найти: AD и BD.

Решение. 1) По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 21^2 + 28^2 = 7^2(3^2 + 4^2) = 7^2 \cdot 5^2$. Отсюда получаем $AB = 7 \cdot 5 = 35$.

2) Пусть $AD = x$, тогда $BD = 35 - x$. По теореме о биссектрисе треугольника $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$, т. е. $\frac{x}{21} = \frac{35 - x}{28}$, откуда находим: $x = 15$.

Итак, $AD = 15$, $BD = 35 - 15 = 20$.

Ответ: 15 и 20.

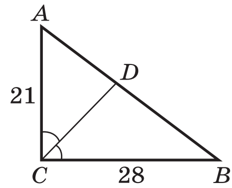


Рис. 77

е) **Дано:** $\triangle ABC$, AD — биссектриса угла CAE (рис. 78).

Доказать: $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$.

Решение. Обозначим величины углов CAD и DAE буквой α. Тогда $\angle BAD = 180° - \alpha$.

По теореме синусов применительно к треугольникам ABD и ACD получаем: $\frac{BD}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{AB}{\sin D}$, $\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin D}$.

Так как $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то из этих равенств следует, что

$$\frac{BD}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\sin D}, \quad \frac{CD}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\sin D},$$

откуда получаем искомую пропорцию:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}.$$

ж) **Дано:** $\triangle ABC$, AD — биссектриса, $AB = 2$, $AC = 5$, $DE \parallel AB$ (рис. 79).

Найти: $\frac{AE}{EC}$.

Решение. 1) По теореме о биссектрисе треугольника $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$, т. е. $\frac{BD}{2} = \frac{CD}{5}$, откуда следует, что $\frac{BD}{CD} = \frac{2}{5}$.

2) По теореме Фалеса $\frac{AE}{EC} = \frac{BD}{CD} = \frac{2}{5}$.

Ответ: $\frac{2}{5}$.

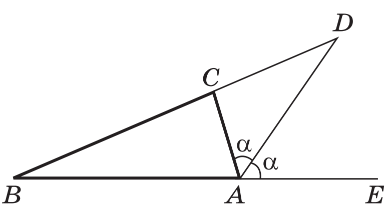


Рис. 78

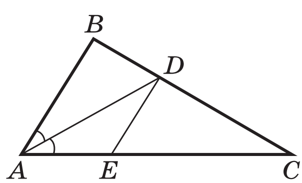


Рис. 79

143.

в) **Дано:** $\triangle ABM \sim \triangle ABC$, $BM = 4$, $CM = 5$ (рис. 80).

Найти: AB.

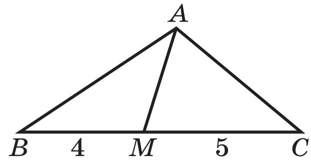


Рис. 80

Решение. Так как треугольники ABM и ABC подобны, то углы одного треугольника соответственно равны углам другого. Найдём соответственно равные углы этих треугольников. Угол B у них общий, а $\angle AMB > \angle C$, так как угол AMB — внешний угол треугольника AMC. Поэтому $\angle BAM = \angle C$ и $\angle AMB = \angle BAC$. Запишем пропорцию для сходственных сторон треугольников ABM и ABC, т. е. для сторон, лежащих против соответственно равных углов: $\frac{BM}{AB} = \frac{AB}{BC}$. Отсюда, учитывая, что $BC = BM + MC = 9$, получаем, что $AB^2 = BM \cdot BC = 36$ и, следовательно, $AB = 6$.

Ответ: 6.

г) **Дано:** трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD = 12$ см, $BC = 3$ см, $\triangle ABC \sim$ $\sim \triangle ACD$ (рис. 81).

Найти: AC.

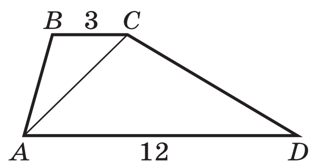


Рис. 81

Решение. Найдём соответственно равные углы в подобных треугольниках ABC и ACD. Так как $BC \parallel AD$, то $\angle BCA = \angle CAD$ (накрест лежащие углы). Угол BAC треугольника ABC не равен углу ACD треугольника ACD, так как в противном случае прямые AB и CD были бы параллельными, поскольку указанные углы являются накрест лежащими, образованными при пересечении прямых AB и CD секущей AC. Следовательно, $\angle BAC = \angle D$ и поэтому, $\angle ABC = \angle ACD$.

Напишем пропорцию для сходственных сторон треугольников ABC и ACD:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AC}.$$

Отсюда получаем, что $AC^2 = AD \cdot BC = 12 \cdot 3 = 36$ и, следовательно, $AC = 6$ см.

Ответ: 6 см.

145.

ж) **Дано:** $\triangle ABC$, $\angle A$ — острый, BB_1 и CC_1 — высоты (рис. 82).

Доказать: $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Найти: коэффициент подобия треугольников AB_1C_1 и ABC.

Решение. Для прямоугольных треугольников ABB_1 и ACC_1 справедливы равенства $AB_1 = AB \cdot \cos A$ и $AC_1 = AC \cdot \cos A$. Отсюда следует, что:

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \cos A.$$

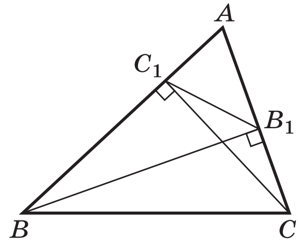


Рис. 82

Таким образом, стороны AB_1 и AC_1 треугольника AB_1C_1 пропорциональны сторонам AB и AC треугольника ABC, и при этом угол, заключённый между теми и другими сторонами, один и тот же (угол A). Следовательно, $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ по первому признаку подобия треугольников, а коэффициент подобия равен отношению $\frac{AB_1}{AB}$, т. е. $\cos A$.

Ответ: $\cos A$.

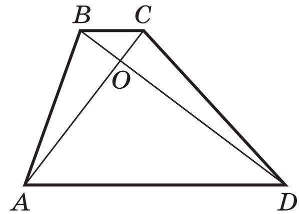


Рис. 83

з) **Дано:** трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$, отношение периметров треугольников OAD и OBC равно 4, $AD + BC = 10$ (рис. 83).
Найти: AD и BC.

Решение. $\triangle AOD \sim \triangle COB$ по второму признаку подобия треугольников ($\angle AOD = \angle BOC$, так как эти углы вертикальные; $\angle OAD = \angle OCB$, поскольку эти углы накрест лежащие, образованные при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AC). Так как отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия (задача 144 а)), то коэффициент подобия треугольников OAD и OCB равен 4, и, следовательно, $\frac{AD}{BC} = 4$, т. е. $AD = 4BC$.

Используя последнее равенство и условие $AD + BC = 10$, находим: $BC = 2$, $AD = 8$.

Ответ: 8 и 2.

л) **Дано:** трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AC^2 = AD \cdot BC$ (рис. 84).
Доказать: $AB^2 \cdot AD = CD^2 \cdot BC$.

Решение. Из равенства $AC^2 = AD \times \times BC$ следует пропорция $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AC}$. Таким образом, стороны AC и BC треугольника ABC пропорциональны сторонам AD и AC треугольника DCA. Кроме того, углы ACB и CAD,

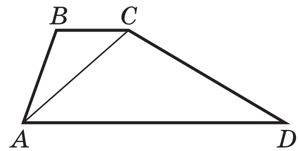


Рис. 84

заключённые между этими сторонами, равны, поскольку это накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AC. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle DCA$ по первому признаку подобия треугольников, и написанную пропорцию можно расширить:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{CD}.$$

Приравнивая первое и третье отношения, получаем равенство $AB \cdot AD = CD \cdot AC$. Умножим это равенство на AB: $AB^2 \cdot AD = CD \cdot AC \cdot AB$. Приравнивая второе и третье отношения, приходим к равенству $AC \cdot AB = CD \cdot BC$. Из двух последних равенств следует искомое равенство

$$AB^2 \cdot AD = CD^2 \cdot BC.$$

м) **Дано:** выпуклый четырёхугольник $ABCD$, невыпуклый четырёхугольник $ABED$, $\angle ABE = \angle CBD$, $\angle BAE = \angle BDC$ (рис. 85).

Доказать: $\triangle BCE \sim \triangle ABD$.

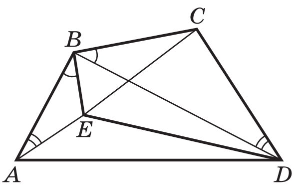


Рис. 85

Решение. Очевидно, что $\triangle ABE \sim$ $\sim \triangle DBC$ (по второму признаку подобия треугольников), поэтому

$$\frac{BE}{BC} = \frac{AB}{BD} \text{ или } \frac{BE}{AB} = \frac{BC}{BD},$$

т. е. стороны BE и BC треугольника BCE пропорциональны сторонам AB и BD треугольника ABD. Кроме того, углы CBE и ABD, заключённые между этими сторонами, равны (см. рис. 85). Следовательно, $\triangle BCE \sim \triangle ABD$ (по первому признаку подобия треугольников), что и требовалось доказать.

146.

а) **Дано:** $\triangle ABC$, CD — высота, $\angle C = 90°$ (рис. 86).

Доказать: $\triangle ACD \sim \triangle BCD$, $\triangle ACD \sim \triangle ABC$, $\triangle BCD \sim$ $\sim \triangle ABC$.

Решение. Так как $\angle A + \angle 1 = 90°$ и $\angle A + \angle B = 90°$, то $\angle 1 = \angle B$.

Таким образом, треугольники ACD, BCD и ABC имеют по прямому углу и по равному острому углу. Следовательно, любые два из этих треугольников подобны (по второму признаку подобия треугольников), что и требовалось доказать.

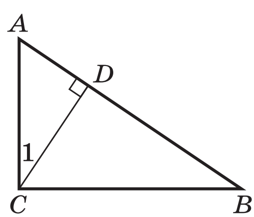


Рис. 86

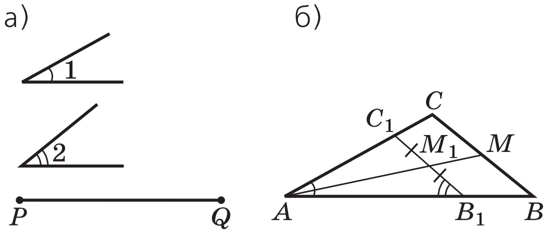


Рис. 87

147.

и) **Дано:** углы 1 и 2 и отрезок PQ (рис. 87, *а*).

Построить: треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle 1$, $\angle B = \angle 2$ и медиана AM равна PQ.

Решение. 1) Построим какой-нибудь треугольник AB_1C_1, в котором $\angle A = \angle 1$, $\angle B_1 = \angle 2$ (рис. 87, *б*).

2) Построим середину M_1 стороны B_1C_1, проведём луч AM_1 и отложим на нём отрезок $AM = PQ$.

3) Через точку M проведём прямую, параллельную прямой B_1C_1, она пересечёт лучи AB_1 и AC_1 в некоторых точках B и C (см. рис. 87, *б*). Треугольник ABC — искомый. Действительно, так как AM_1 — медиана треугольника AB_1C_1 и $BC \parallel B_1C_1$, то $BM = MC$ (задача 145 д)), т. е. AM — медиана треугольника ABC, равная по построению данному отрезку PQ. Угол A по построению равен данному углу 1, угол B равен данному углу 2, поскольку $\angle B = \angle B_1$ (соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых BC и B_1C_1 секущей AB), а $\angle B_1 = \angle 2$ по построению. Итак, построенный треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

к) **Дано:** угол 1 и отрезок PQ (рис. 88, *а*).

Построить: треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle 1$, $AB : AC = 2 : 5$, $MB = PQ$, где M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

Решение. 1) Построим какой-нибудь треугольник AB_1C_1, в котором $\angle A = \angle 1$, $AB_1 : AC_1 = 2 : 5$, а затем построим точку M_1 пересечения медиан этого треугольника (рис. 88, *б*).

2) По известным отрезкам AB_1, M_1B_1 и данному отрезку PQ построим отрезок $P_1Q_1 = \dfrac{PQ \cdot AB_1}{M_1B_1}$ (как это сделать, мы знаем) и отложим на луче AB_1 отрезок AB, равный P_1Q_1 (см. рис. 88, *б*).

3) Через точку B проведём прямую, параллельную прямой B_1C_1, и обозначим буквой C точку пересечения проведённой прямой с лучом AC_1.

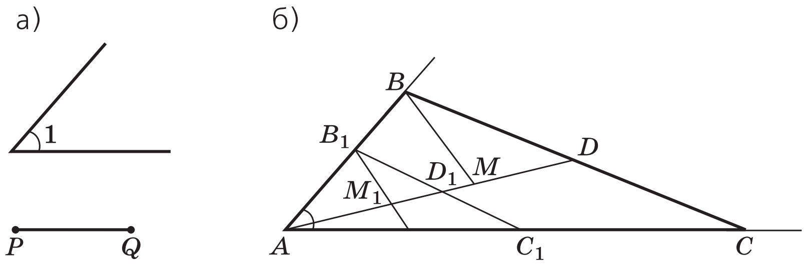


Рис. 88

Докажем, что построенный треугольник ABC — искомый. Так как $BC \parallel B_1C_1$, то $\triangle ABC \backsim \triangle AB_1C_1$, поэтому $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$, откуда следует, что

$$AB : AC = AB_1 : AC_1 = 2 : 5.$$

Остаётся доказать, что $MB = PQ$, где M — точка пересечения медиан построенного треугольника ABC. Для этого проведём через точку B прямую, параллельную B_1M_1, и докажем, что точка M пересечения проведённой прямой с лучом AM_1 является точкой пересечения медиан треугольника ABC и $MB = PQ$.

Отметим точки D_1 и D (см. рис. 88, *б*). Так как точка D_1 — середина отрезка B_1C_1 и $BC \parallel B_1C_1$, то точка D — середина отрезка BC (задача 145 д)), т. е. отрезок AD — медиана треугольника ABC.

Поскольку $B_1M_1 \parallel BM$ и $B_1D_1 \parallel BD$, то $\triangle AB_1M_1 \backsim \triangle ABM$ и $\triangle AB_1D_1 \backsim \triangle ABD$. Отсюда следует, что $\frac{AM_1}{AM} = \frac{AB_1}{AB}$ и $\frac{AD_1}{AD} = \frac{AB_1}{AB}$. Следовательно, $\frac{AM_1}{AM} = \frac{AD_1}{AD}$ или $\frac{AM_1}{AD_1} = \frac{AM}{AD}$, а так как M_1 — точка пересечения медиан треугольника AB_1C_1, то $\frac{AM_1}{AD_1} = \frac{2}{3}$. Поэтому и $\frac{AM}{AD} = \frac{2}{3}$, а это означает, что точка M является точкой пересечения медиан треугольника ABC.

Из подобия треугольников AB_1M_1 и ABM следует также пропорция $\frac{MB}{M_1B_1} = \frac{AB}{AB_1}$, откуда, учитывая равенства $AB = P_1Q_1 = \frac{PQ \cdot AB_1}{M_1B_1}$, получаем $MB = PQ$, что и требовалось доказать.

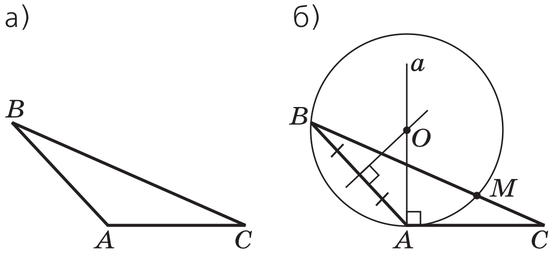


Рис. 89

148.

е) Дано: $\triangle ABC$, $\angle A$ — тупой (рис. 89, *а*).

Построить: такую точку M на стороне BC, что $AC^2 = CM \cdot CB$.

Решение. 1) Через точку A проведём прямую a, перпендикулярную к прямой AC (рис. 89, *б*).

2) Построим серединный перпендикуляр к отрезку AB.

3) Обозначим буквой O точку пересечения этого серединного перпендикуляра и прямой a и проведём окружность с центром O радиуса OA. Эта окружность пересекается со стороной BC в точке M, которая и является искомой.

Действительно, так как точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, то $OB = OA$ и, следовательно, окружность проходит через точку B, а поскольку $OA \perp AC$, то окружность касается прямой AC в точке A.

По теореме о квадрате касательной $AC^2 = CM \cdot CB$, т. е. построенная точка M — искомая.

151.

Дано: трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD = 5$, $AB = 3$, $BD = 4$, $CM \perp BD$ (рис. 90).

Найти: $\sin\angle BCM$.

Решение. 1) Проведём $BH \perp AD$, тогда $BH \perp BC$. Так как $\angle BCM = \angle HBD$ (острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами), то $\sin\angle BCM = \sin\angle HBD$.

2) Заметим, что $AD^2 = AB^2 + BD^2$ (действительно, $5^2 = 3^2 + 4^2$), следовательно треугольник ABD — прямоугольный. Поэтому согласно утверждению задачи 133 е) справедливо равенство $BD^2 = HD \cdot AD$, откуда

$$HD = \frac{BD^2}{AD} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5}.$$

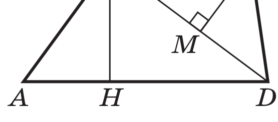


Рис. 90

3) Из треугольника BHD находим:

$$\sin \angle HBD = \frac{HD}{BD} = \frac{4}{5}.$$

Итак, $\sin \angle BCM = \sin \angle HBD = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{4}{5}$.

154.

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 91).

Доказать: $BC \geqslant (AB + AC) \sin \frac{A}{2}$.

Решение. Проведём биссектрису AD угла A и перпендикуляры BH и CK к прямой AD (рис. 91, *б*). Так как треугольники ABH и ACK прямоугольные, то $BH = AB \cdot \sin \frac{A}{2}$, $KC = AC \cdot \sin \frac{A}{2}$. Если точки H и D не совпадают, то $BD > BH$ (гипотенуза BD прямоугольного треугольника BHD больше катета BH), а если совпадают, то $BD = BH$. В любом случае $BD \geqslant BH$ и, следовательно, $BD \geqslant AB \cdot \sin \frac{A}{2}$.

Аналогично получается неравенство $DC \geqslant AC \cdot \sin \frac{A}{2}$. Складывая неравенства для BD и DC, приходим к искомому неравенству

$$BC = BD + DC \geqslant (AB + AC) \sin \frac{A}{2}.$$

160.

Дано: $\triangle ABC$, $AM = BM = 1$, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$ (рис. 92).
Найти: $\angle ABC$.
Решение. 1) Так как $AB^2 = AM^2 + BM^2$ (действительно, $(\sqrt{2})^2 = 1^2 + 1^2$) и $AM = BM$, то треугольник ABM — прямоугольный и равнобедренный и, следовательно, $\angle ABM = 45°$.

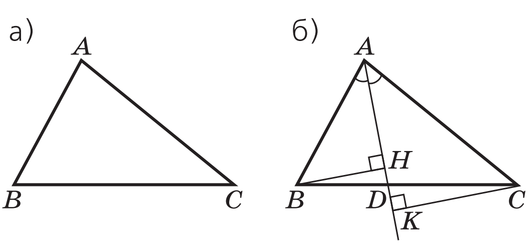


Рис. 91

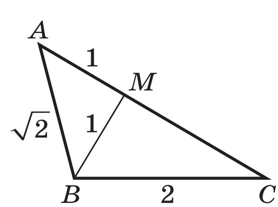


Рис. 92

2) В прямоугольном треугольнике BMC катет BM равен половине гипотенузы BC, поэтому $\angle C = 30°$, а $\angle MBC = 60°$.

3) $\angle ABC = \angle ABM + \angle MBC = 45° + 60° = 105°$.

Ответ: 105°.

161.

Дано: точка M лежит внутри угла A, равного α; $MH \perp AH$ и $MH = a$, $MK \perp AK$ и $MK = b$ (рис. 93, *а*).

Найти: AM.

Решение. 1) Рассмотрим окружность с диаметром AM. Так как углы AHM и AKM — прямые, то точки H и K лежат на этой окружности (рис. 93, *б*). Во вписанном четырёхугольнике $AKMH$ сумма противоположных углов KAH и KMH равна 180°, поэтому $\angle KMH = 180° - \alpha$.

2) По теореме косинусов применительно к треугольнику KMH получаем:

$$KH^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha) = \\ = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha,$$

а по теореме п. 73

$$KH = AM \cdot \sin(180° - \alpha) = AM \cdot \sin\alpha,$$

откуда $KH^2 = AM^2 \cdot \sin^2\alpha$.

3) Приравнивая два выражения для KH^2, находим сначала AM^2, а затем AM:

$$AM = \frac{\sqrt{a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2}}{\sin\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2}}{\sin\alpha}$.

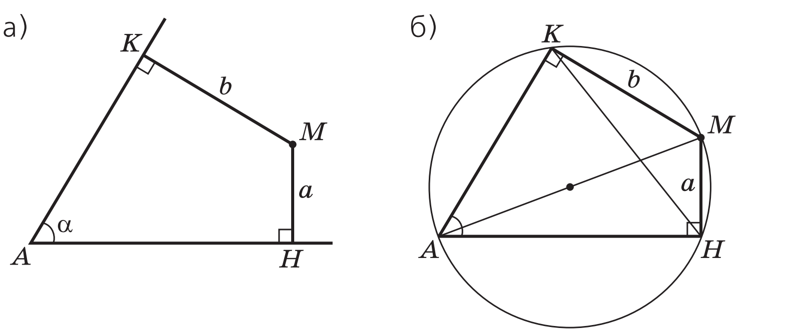


Рис. 93

163.

Дано: окружность с центром O, точка M лежит на диаметре окружности, хорда AB параллельна этому диаметру (рис. 94).

Доказать: величина $MA^2 + MB^2$ не зависит от положения хорды AB.

Решение. 1) Пусть $OM = a$, радиус окружности равен R. Проведём перпендикуляр OH к прямой AB и отрезок MH (см. рис. 94). По теореме косинусов применительно к треугольникам AHM и BHM получаем:

$$MA^2 = MH^2 + AH^2 - 2MH \cdot AH \cdot \cos\angle AHM,$$
$$MB^2 = MH^2 + BH^2 - 2MH \cdot BH \cdot \cos\angle BHM.$$

Сложим эти равенства с учётом того, что $AH = BH$ (это следует из равенства прямоугольных треугольников AHO и BHO — они равны по гипотенузе и катету) и $\cos\angle AHM = \cos(180° - \angle BHM) = -\cos\angle BHM$. Получим:

$$MA^2 + MB^2 = 2(MH^2 + AH^2).$$

2) Из прямоугольных треугольников AHO и HOM ($\angle HOM = 90°$, так как $OH \perp AB$ и $OM \parallel AB$) с помощью теоремы Пифагора находим:

$$AH^2 = AO^2 - OH^2 = R^2 - OH^2$$
и $MH^2 = OM^2 + OH^2 = a^2 + OH^2$.

Поэтому $MH^2 + AH^2 = R^2 + a^2$ и $MA^2 + MB^2 = 2(R^2 + a^2)$.

Таким образом, величина $MA^2 + MB^2$ выражается только через радиус R окружности и расстояние a от точки M до центра окружности и, следовательно, не зависит от положения хорды AB, что и требовалось доказать.

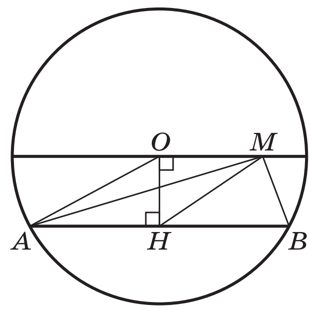


Рис. 94

170.

Дано: $\triangle ABC$, AD — биссектриса, точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 95).

Доказать: $\dfrac{AO}{OD} = \dfrac{AB + AC}{BC}$.

Решение. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, является точкой пересечения его биссектрис AD и BE

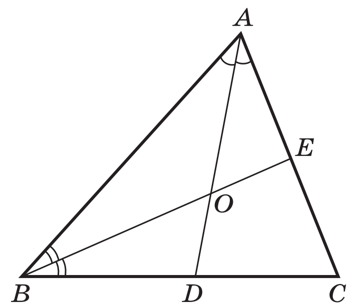


Рис. 95

(см. рис. 95). Согласно теореме о биссектрисе треугольника (применительно к треугольникам ABD и ABC) справедливы равенства $\frac{AO}{OD} = \frac{AB}{BD}$ и $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$. Из последнего равенства, используя свойства пропорций, получаем: $\frac{AB}{BD} = \frac{AB + AC}{BD + DC} = \frac{AB + AC}{BC}$ и, следовательно, $\frac{AO}{OD} = \frac{AB + AC}{BC}$, что и требовалось доказать.

171.

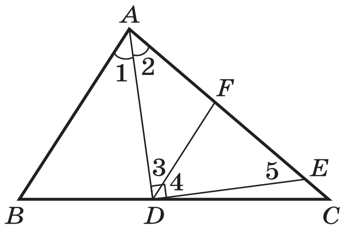


Рис. 96

Дано: $\triangle ABC$, AD — биссектриса, $AB = c$, $AC = b$, $DE \perp AD$ (рис. 96).

Доказать: $AE = \frac{2bc}{b + c}$.

Решение. 1) Проведём $DF \parallel AB$ (см. рис. 96). Тогда $AF = \frac{bc}{b + c}$ согласно утверждению задачи 142 ж).

2) Так как $\angle 1 = \angle 2$ (поскольку AD — биссектриса) и $\angle 1 = \angle 3$ (накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых AB и DF секущей AD), то $\angle 2 = \angle 3$, откуда следует, что треугольник AFD равнобедренный и $AF = FD = \frac{bc}{b + c}$.

3) Так как $\angle 4 = 90° - \angle 3$, $\angle 5 = 90° - \angle 2$ и $\angle 2 = \angle 3$, то $\angle 4 = \angle 5$. Следовательно, треугольник DFE равнобедренный и $FE = FD = \frac{bc}{b + c}$.

4) $AE = AF + FE = \frac{bc}{b + c} + \frac{bc}{b + c} = \frac{2bc}{b + c}$, что и требовалось доказать.

172.

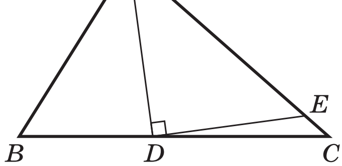


Рис. 97

Дано: $\triangle ABC$, AD — биссектриса, $AB = c$, $AC = b$ (рис. 97).

Доказать: $AD = \frac{2bc}{b + c} \cos \frac{A}{2}$.

Решение. Проведём $DE \perp AD$ (см. рис. 97). Тогда $AE = \frac{2bc}{b + c}$ (согласно утверждению задачи 171).

Из прямоугольного треугольника ADE находим: $AD = AE \cdot \cos\frac{A}{2} = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$, что и требовалось доказать.

173.

Дано: $\triangle ABC$, AD — биссектриса, $AB = c$, $AC = b$, $BD = m$, $CD = n$ (рис. 98).

Доказать: $AD^2 = bc - mn$.

Решение. 1) По теореме косинусов применительно к треугольнику ABD получаем:

$$m^2 = c^2 + AD^2 - 2c \cdot AD \cdot \cos\frac{A}{2}. \qquad (1)$$

2) Так как $AD = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ (задача 172), то $\cos\frac{A}{2} = \frac{AD(b+c)}{2bc}$.

3) Подставляя выражение для $\cos\frac{A}{2}$ в равенство (1), приходим к равенствам

$$m^2 = c^2 + AD^2 - \frac{AD^2(b+c)}{b} = c^2 - \frac{AD^2 \cdot c}{b},$$

откуда следует, что

$$AD^2 = bc - \frac{m^2 \cdot b}{c}. \qquad (2)$$

4) По теореме о биссектрисе треугольника $\frac{m}{c} = \frac{n}{b}$, т. е. $\frac{mb}{c} = n$. Используя последнее равенство, из (2) получаем: $AD^2 = bc - mn$, что и требовалось доказать.

Замечание. Эту задачу можно решить и другим способом (см. решение задачи 188).

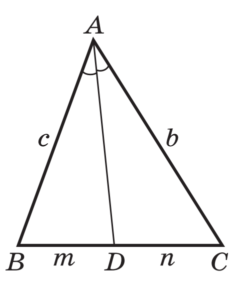


Рис. 98

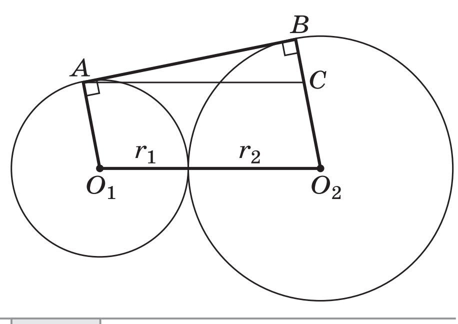


Рис. 99

176*.

Дано: окружности с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга извне, r_1 и r_2 — радиусы окружностей, AB — их общая касательная, A и B — точки касания (рис. 99).

Доказать: $AB^2 = 2r_1 \cdot 2r_2$.

Решение. 1) Проведём радиусы O_1A и O_2B и отрезок AC, параллельный O_1O_2 (см. рис. 99). Так как $O_1A \perp AB$ и $O_2B \perp AB$ (радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен к касательной), то $O_1A \parallel O_2B$ и, следовательно, четырёхугольник ACO_2O_1 — параллелограмм. Поэтому $AC = O_1O_2 = r_1 + r_2$ и $O_2C = O_1A = r_1$, а $BC = |r_2 - r_1|$.

2) Если $r_1 = r_2$, то точки B и C совпадают, поэтому $AB = 2r_1 = 2r_2$, $AB^2 = 2r_1 \cdot 2r_2$. Если же $r_1 \neq r_2$, то по теореме Пифагора применительно к прямоугольному треугольнику ABC получаем: $AC^2 = AB^2 + BC^2$, откуда

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2 = 2r_1 \cdot 2r_2,$$

что и требовалось доказать.

178*.

Дано: две окружности пересекаются в точках A и B, AC и AD — касательные к окружностям (рис. 100).

Доказать: $AC \cdot BA = AD \cdot BC$.

Решение. 1) $\angle C = \frac{1}{2}\smile ANB$ (вписанный угол) и $\angle BAD = \frac{1}{2}\smile ANB$ (угол между касательной и хордой), поэтому $\angle C = \angle BAD$.

2) $\angle D = \frac{1}{2}\smile AMB$ (вписанный угол) и $\angle CAB = \frac{1}{2}\smile AMB$ (угол между касательной и хордой), поэтому $\angle D = \angle CAB$.

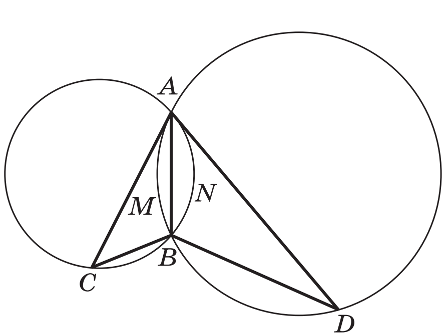


Рис. 100

3) Таким образом, два угла треугольника ABC равны двум углам треугольника ABD. Поэтому и третьи углы этих треугольников равны: $\angle ABC = \angle ABD$.

4) По теореме синусов применительно к треугольникам ABC и ABD получаем:

$$\frac{BC}{\sin\angle CAB} = \frac{AC}{\sin\angle ABC}, \quad \frac{BA}{\sin D} = \frac{AD}{\sin\angle ABD},$$

откуда следует (с учётом равенств для углов), что

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle CAB} = \frac{\sin\angle ABC}{\sin D}, \quad \frac{AD}{BA} = \frac{\sin\angle ABD}{\sin D} = \frac{\sin\angle ABC}{\sin D}.$$

Так как правые части полученных равенств равны, то $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BA}$, т. е.

$$AC \cdot BA = AD \cdot BC,$$

что и требовалось доказать.

182*.

Дано: окружности с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга извне, и каждая из них касается изнутри окружности радиуса 10 с центром O_3 (рис. 101).

Найти: периметр треугольника $O_1O_2O_3$.

Решение. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r_1 и r_2. Тогда $O_1O_2 = r_1 + r_2$, $O_1O_3 = 10 - r_1$, $O_2O_3 = 10 - r_2$. Поэтому $O_1O_2 + O_1O_3 + O_2O_3 = 20$.

Ответ: 20.

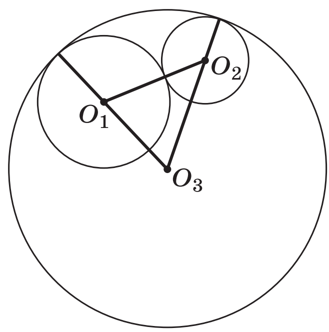


Рис. 101

184.

Дано: $\triangle ABC$, $AB = 12$ см, $BC = 18$ см, $CA = 27$ см, $A_1C = 18$ см, $B_1C = 12$ см (рис. 102).

Доказать: пять элементов (т. е. сторон и углов) треугольника ABC равны элементам треугольника A_1B_1C.

Решение. Согласно условию $\frac{BC}{AC} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$ и $\frac{B_1C}{A_1C} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. Следовательно, $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C}{A_1C}$, и, кроме

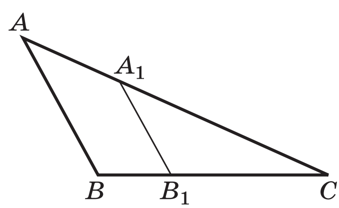


Рис. 102

того, угол, заключённый между сторонами BC и AC, тот же самый, что и угол, заключённый между сторонами B_1C и A_1C (угол C). Отсюда следует, что $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C$ (по первому признаку подобия треугольников). Поэтому углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника A_1B_1C: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C$ — общий. Кроме того, согласно условию задачи, $A_1C = BC$ и $B_1C = AB$. Таким образом, пять элементов треугольника ABC равны элементам треугольника A_1B_1C, что и требовалось доказать.

Замечание. Отметим, что треугольники ABC и A_1B_1C не равны, хотя имеют по пять одинаковых (равных) элементов.

185.

Дано: трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$, $BC : AD = 1 : 2$, $CM : MD = 1 : 2$ (рис. 103, *а*).

Доказать: прямая AM делит отрезок BD пополам, т. е. $BO = OD$.

Решение. Продолжим отрезок AM до пересечения с прямой BC в точке E (рис. 103, *б*). Треугольники CME и DMA подобны по второму признаку подобия треугольников ($\angle CME = \angle DMA$, поскольку эти углы вертикальные; $\angle CEM = \angle DAM$, так как эти углы накрест лежащие, образованные при пересечении параллельных прямых CE и AD секущей AE). Коэффициент k подобия этих треугольников равен отношению сходственных сторон: $k = \dfrac{CM}{MD} = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, $\dfrac{CE}{AD} = k = \dfrac{1}{2}$, т. е. $CE = \dfrac{1}{2}AD$, а так как $BC = \dfrac{1}{2}AD$ (по условию), то $BE = BC + CE = \dfrac{1}{2}AD + \dfrac{1}{2}AD = AD$.

Таким образом, в четырёхугольнике $ABED$ противоположные стороны AD и BE равны и параллельны, поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм и его диагонали AE и BD точкой пересечения делятся пополам. Итак, $BO = OD$, что и требовалось доказать.

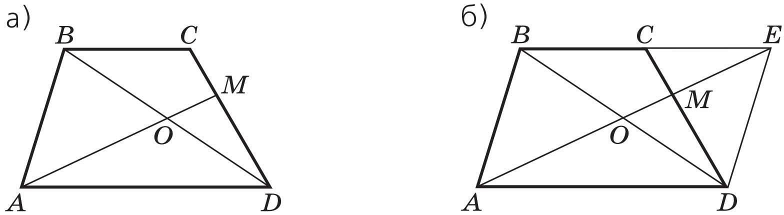


Рис. 103

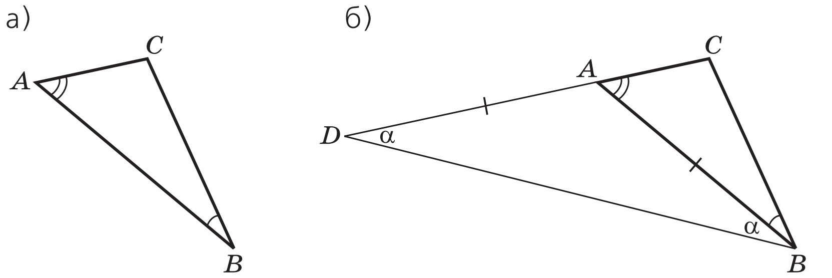


Рис. 104

187.

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 104, *а*).

Доказать: 1) если $\angle A = 2\angle B$, то $BC^2 = AC^2 + AB \cdot AC$; 2) обратно, если $BC^2 = AC^2 + AB \cdot AC$, то $\angle A = 2\angle B$.

Решение. Продолжим отрезок AC за точку A на отрезок $AD = AB$. Тогда $\angle ABD = \angle ADB$. Величину каждого из этих углов обозначим буквой α (рис. 104, *б*). Заметим, что $\angle A = 2\alpha$, так как угол CAB — внешний угол треугольника ABD.

1) Если $\angle A = 2\angle B$, то $\angle B = \alpha$ (поскольку $\angle A = 2\alpha$) и $\angle CBD = 2\alpha$. Треугольники ACB и BCD подобны по второму признаку подобия треугольников ($\angle CAB = \angle CBD = 2\alpha$, угол C общий). Следовательно, $\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{BC}$, т. е. $BC^2 = CD \cdot AC$. Отсюда, учитывая, что $CD = AC + AD = AC + AB$, получаем искомое равенство $BC^2 = AC^2 + AB \cdot AC$.

2) Обратно, если выполнено равенство $BC^2 = AC^2 + AB \cdot AC$, то $BC^2 = AC(AC + AB) = AC(AC + AD) = AC \cdot CD$, откуда $\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{BC}$, т. е. стороны BC и AC треугольника ABC пропорциональны сторонам CD и BC треугольника BCD. Кроме того, угол между сторонами BC и AC и также между сторонами CD и BC один и тот же (угол C). Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ (по первому признаку подобия треугольников). Отсюда следует, что $\angle CAB = \angle CBD$, т. е. $\angle CAB = \angle B + \alpha$, а так как $\angle CAB = 2\alpha$, то $\angle B = \alpha$ и $\angle CAB = 2\angle B$, что и требовалось доказать.

188.

Дано: $\triangle ABC$, AD — биссектриса, луч AD пересекает описанную окружность в точке E (рис. 105).

Доказать: 1) $\triangle ADC \sim \triangle ABE$; 2) $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$.

Решение. 1) Так как углы BAE и CAD равны (по условию) и $\angle BEA = \angle ACB$ (поскольку вписанные углы BEA и ACB опираются на одну и ту же дугу), то $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ по второму признаку подобия треугольников. Первое утверждение доказано.

2) Из подобия треугольников ADC и ABE получаем пропорцию

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AB},$$

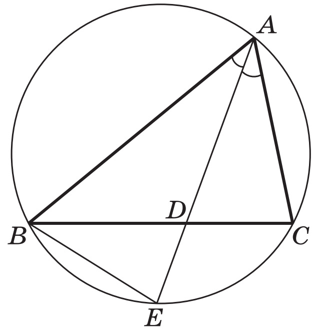


Рис. 105

откуда

$$AC \cdot AB = AD \cdot AE = AD \cdot (AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE$$

и, следовательно, $AD^2 = AC \cdot AB - AD \cdot DE$. Из последнего равенства, учитывая, что $AD \cdot DE = BD \cdot DC$ (по теореме об отрезках пересекающихся хорд), получаем:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC,$$

что и требовалось доказать.

194.

Дано: острые углы 1 и 2, сумма которых больше $90°$, и отрезок PQ (рис. 106, *а*).

Построить: треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle 1$, $\angle B = \angle 2$, $HC = PQ$, где H — ортоцентр треугольника ABC.

Решение. Для решения задачи воспользуемся методом подобия и построим сначала какой-нибудь треугольник $A_1B_1C_1$, в котором $\angle A_1 = \angle 1$, $\angle B_1 = \angle 2$ (рис. 106, *б*). Этот треугольник подобен искомому треугольнику ABC (рис. 106, *в*) по второму признаку подобия треугольников ($\angle A_1 = \angle A = \angle 1$, $\angle B_1 = \angle B = \angle 2$). В подобных треугольниках отношение любых двух сходственных отрезков

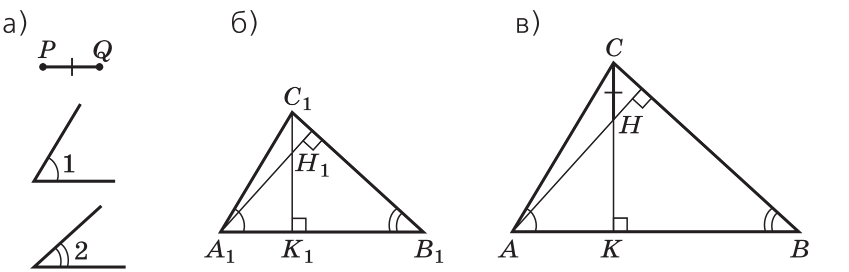


Рис. 106

равно коэффициенту подобия, поэтому $\frac{CK}{C_1K_1} = \frac{HC}{H_1C_1}$ (см. рис. 106, *б*, *в*), откуда получаем: $CK = \frac{C_1K_1 \cdot HC}{H_1C_1} = \frac{C_1K_1 \cdot PQ}{H_1C_1}$, т. е. высота CK искомого треугольника ABC выражается полученной формулой через известные отрезки C_1K_1 и H_1C_1 в построенном треугольнике $A_1B_1C_1$ и данный отрезок PQ. Отсюда следует, что построение искомого треугольника ABC можно завершить следующим образом:

1) строим отрезок $MN = \frac{C_1K_1 \cdot PQ}{H_1C_1}$ (как это сделать, мы знаем). Он равен высоте CK искомого треугольника ABC;

2) строим прямоугольный треугольник ACK по данному углу A ($\angle A = \angle 1$) и катету CK, равному построенному отрезку MN;

3) от луча CK откладываем угол, равный $90° - \angle 2$, так, чтобы точка B пересечения стороны этого угла с прямой AK лежала по другую сторону от прямой CK, нежели точка A.

Треугольник ABC — искомый. В самом деле, у него $\angle A = \angle 1$ и $\angle B = \angle 2$ (по построению), $HC = \frac{H_1C_1 \cdot CK}{C_1K_1}$ (это следует из подобия треугольника ABC и построенного вначале треугольника $A_1B_1C_1$). Но так как $CK = MN = \frac{C_1K_1 \cdot PQ}{H_1C_1}$, то $HC = PQ$. Таким образом, построенный треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Замечание. В ходе решения задачи мы воспользовались тем, что в подобных треугольниках отношение любых двух сходственных отрезков равно коэффициенту подобия. Полезно предложить учащимся доказать это утверждение для отношений $\frac{CK}{C_1K_1}$ (для этого нужно рассмотреть подобные треугольники ACK и $A_1C_1K_1$) и $\frac{HC}{H_1C_1}$ (для этого нужно рассмотреть подобные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$).

Задачи повышенной трудности

199.

Дано: две окружности пересекаются в точках A и P, AB — касательная к первой окружности, $PD \parallel AB$ (рис. 107).

Доказать: $AB = CD$.

Решение. Проведём отрезки AP, BC и AD (см. рис. 107); $\angle BAP = \angle BCP$, так как эти вписанные углы опираются на одну и ту же дугу BP второй окружности; $\angle BAP = \angle ADP$, поскольку угол BAP является углом между касательной AB и хордой AP и, следовательно, измеряется половиной дуги AP первой окружности, а угол ADP является вписанным и потому также измеряется половиной той же самой дуги AP.

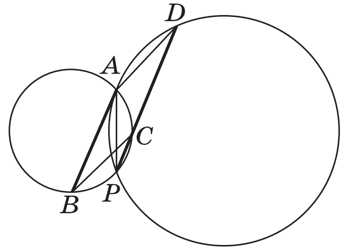


Рис. 107

Из двух полученных равенств для углов следует, что $\angle BCP = \angle ADP$. Поскольку эти углы являются соответственными, образованными при пересечении прямых BC и AD секущей PD, то $BC \parallel AD$, а так как и $AB \parallel CD$ (по условию), то четырёхугольник $ADCB$ — параллелограмм. Следовательно, $AB = CD$, что и требовалось доказать.

203.

Дано: множество треугольников с двумя данными вершинами A и B и заданным расстоянием от третьей вершины до прямой AB.

Доказать: из всех таких треугольников наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

Решение. Рассмотрим один из треугольников данного множества — треугольник ABC на рисунке 108, *а*. Через точку C проведём прямую p, параллельную прямой AB. Любой треугольник с вершинами A, B и третьей вершиной, лежащей на прямой p, принадлежит данному множеству треугольников, поскольку расстояние от любой точки прямой p до прямой AB одинаково для всех точек прямой p. Наряду с произвольным неравнобедренным треугольником ABC рассмотрим равнобедренный треугольник ABD, в котором $AD = BD$ и $D \in p$ (см. рис. 108, *а*). Нужно доказать, что периметр треугольника ABD меньше периметра треугольника ABC, а так как сторона AB у них общая, то нужно доказать, что $AD + BD < AC + BC$ или $2AD < AC + BC$.

Проведём луч с началом A, пересекающий прямую p в точке K и перпендикулярный к этой прямой. Отметим на луче AK точку M так, чтобы прямая p была серединным перпендикуляром к отрезку AM (см. рис. 108, *а*). Тогда $AD = MD$ и $AC = MC$ (свойство серединного перпендикуляра к отрезку).

Так как $BD = AD = MD$, то окружность радиуса DA с центром D проходит через точки B и M. Вписанный в эту

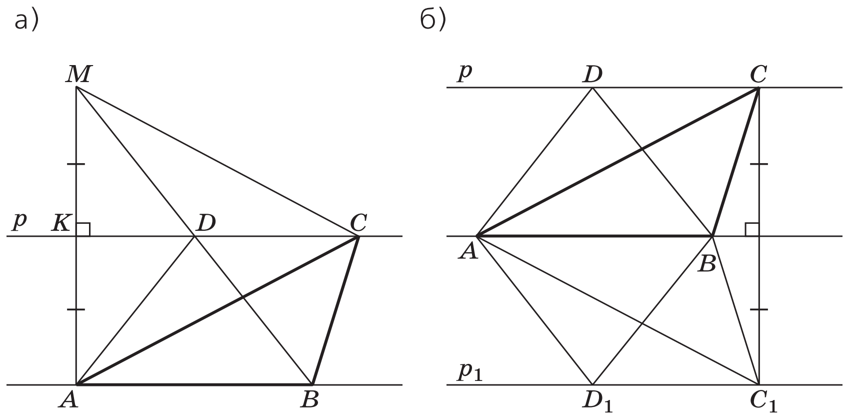


Рис. 108

окружность угол BAM прямой, поэтому отрезок BM — диаметр окружности, и точка D — его середина.

Запишем для треугольника MBC неравенство треугольника: $MB < MC + BC$. Отсюда, учитывая, что $MB = 2MD = 2AD$ и $MC = AC$, получаем неравенство $2AD < AC + BC$, что и требовалось доказать.

Мы рассмотрели только одну часть множества треугольников с данными вершинами A и B и заданным расстоянием от третьей вершины до прямой AB, а именно те треугольники, у которых третья вершина лежит на прямой p. Другую часть этого множества составляют треугольники, у которых третья вершина лежит на прямой p_1, параллельной прямой AB и расположенной на таком же расстоянии от прямой AB, что и прямая p, но по другую сторону от AB (рис. 108, *б*). Для любого неравнобедренного треугольника ABC_1, у которого $C_1 \in p_1$, найдётся такая точка $C \in p$, что $\triangle ABC_1 = \triangle ABC$ (см. рис. 108, *б*), и, следовательно, периметр равнобедренного треугольника ABD меньше периметра неравнобедренного треугольника ABC_1. В то же время равнобедренный треугольник ABD_1, у которого $D_1 \in p_1$, равен равнобедренному треугольнику ABD.

Таким образом, из всех треугольников с двумя данными вершинами A и B и заданным расстоянием от третьей вершины до прямой AB наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

204.

Дано: $\triangle ABC$, AA_1, BB_1 и CC_1 — биссектрисы, $B_2C_2 \perp AA_1$, $C_2A_2 \perp BB_1$, $A_2B_2 \perp CC_1$ (рис. 109).

Доказать: высоты треугольника $A_2B_2C_2$ содержат биссектрисы треугольника ABC.

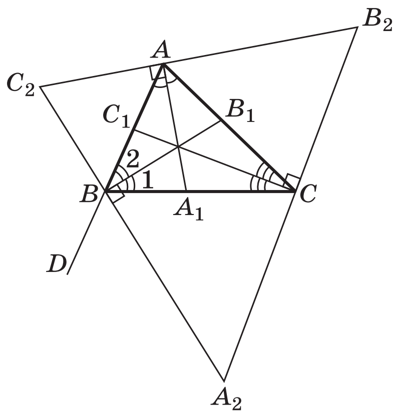


Рис. 109

Решение. Докажем утверждение задачи для высоты треугольника $A_2B_2C_2$, проведённой из вершины A_2 (для двух других высот доказательства аналогичные).

Рассмотрим внешний угол DBC треугольника ABC. Луч BA_2 разделяет его на два угла. При этом $\angle CBA_2 = 90° - \angle 1$, и $\angle DBA_2 + \angle 2 = 180° - \angle B_1BA_2 = 180° - 90° = 90°$ (см. рис. 109), поэтому $\angle DBA_2 = 90° - \angle 2$, а так как $\angle 1 = \angle 2$ (по условию), то $\angle CBA_2 = \angle DBA_2$, т. е. луч BA_2 — биссектриса угла DBC. Следовательно, точка A_2 равноудалена от сторон этого угла, т. е. от лучей BD и BC (по теореме о биссектрисе угла). Таким образом, точка A_2 равноудалена от луча AB и прямой BC.

По аналогичной причине точка A_2 равноудалена от луча AC и прямой BC. Следовательно, точка A_2 равноудалена от лучей AB и AC, т. е. от сторон угла BAC, поэтому она лежит на биссектрисе этого угла, т. е. на луче AA_1, а поскольку $AA_1 \perp B_2C_2$ (по условию), то отрезок A_2A, содержащий отрезок AA_1, является высотой треугольника $A_2B_2C_2$.

Тем самым утверждение задачи для высоты треугольника $A_2B_2C_2$, проведённой из вершины A_2, доказано.

206.

Дано: точки A, B и C, не лежащие на одной прямой (рис. 110, *а*).

Построить: треугольник, для которого данные точки являются основаниями высот.

Вопрос: сколько решений имеет эта задача?

Решение. Проведём отрезки AB, BC и CA и построим биссектрисы треугольника ABC (рис. 110, *б*). Затем построим три прямые, проходящие через точки A, B и C и перпендикулярные соответственно к биссектрисам треугольника ABC.

Точки пересечения этих прямых обозначим A_1, B_1 и C_1 (см. рис. 110, *б*). Треугольник $A_1B_1C_1$ — искомый.

В самом деле, согласно утверждению задачи 204, отрезки A_1A, B_1B и C_1C являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 110, *в*), т. е. построенный треугольник $A_1B_1C_1$ удовлетворяет условию задачи.

Обозначим буквой H точку пересечения биссектрис треугольника ABC (рис. 110, *б*), она же является точкой пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 110, *в*). Очевидно (см. рис. 110, *в*), что данные точки A, B и C являются основаниями высот ещё для трёх треугольников: A_1HB_1, B_1HC_1 и C_1HA_1. Таким образом, задача имеет четыре решения.

Ответ: четыре решения.

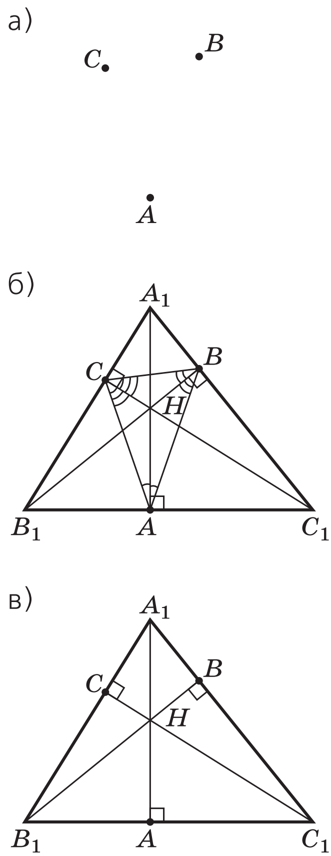


Рис. 110

210.

Дано: биссектриса угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D, точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности (рис. 111).

Доказать: $AD = OD$.

Решение. 1) Центром вписанной в треугольник ABC окружности является точка пересечения его биссектрис. Поэтому точка O лежит на биссектрисе BD угла B, а луч AO является биссектрисой угла A (см. рис. 111). Обозначим буквой E точку пересечения луча AO с описанной окружностью. Так как вписанные углы ABD и CBD равны, то равны и дуги, на которые они опираются: $\smile AD = \smile CD$. По аналогичной причине $\smile BE = \smile CE$.

2) $\angle EAD$ — вписанный, поэтому $\angle EAD = \frac{1}{2}\smile DCE$; $\angle AOD$ — угол с вершиной внутри круга, поэтому $\angle AOD = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile BE)$, а так как

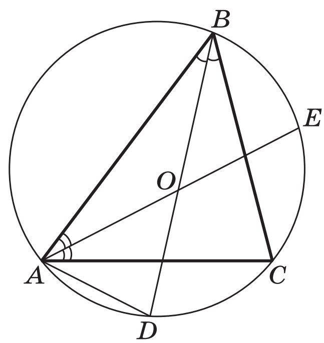


Рис. 111

$\smile AD = \smile CD$ и $\smile BE = \smile CE$, то $\angle AOD = \frac{1}{2}(\smile CD + \smile CE) =$
$= \frac{1}{2} \smile DCE$.

Таким образом, $\angle EAD = \angle AOD$, т. е. равны углы с вершинами A и O треугольника ADO. Следовательно, этот треугольник равнобедренный: $AD = OD$, что и требовалось доказать.

213.

Дано: окружность, описанная около искомого треугольника PQR, точки окружности H, B и M, через которые проходят прямые, содержащие высоту, биссектрису и медиану, проведённые из одной вершины треугольника PQR (рис. 112, *а*).

Построить: треугольник PQR.

Решение. Допустим, что искомый треугольник PQR построен (рис. 112, *б*). Так как вписанные углы QPB и RPB равны (по условию), то $\smile QMB = \smile RHB$, поэтому $BQ = BR$ (хорды, стягивающие равные дуги, равны). Проведём диаметр BA. Его середина (центр O окружности) равноудалена от точек Q и R. Следовательно, точки B и O лежат на серединном перпендикуляре к отрезку QR, т. е. этим серединным перпендикуляром является прямая AB. Поэтому точка K пересечения прямой AB с отрезком QR является серединой этого отрезка. Из этого следует, что точка K лежит на отрезке PM. Кроме того, $AB \parallel PH$, поскольку $AB \perp QR$ и $PH \perp QR$.

Теперь ясно, что построение искомого треугольника PQR можно выполнить следующим образом.

1) Построим диаметр BA. Это можно сделать так: проведём какую-нибудь хорду BN, а затем построим прямую, проходящую через точку N и перпендикулярную к прямой NB. Эта прямая пересекается с окружностью в такой

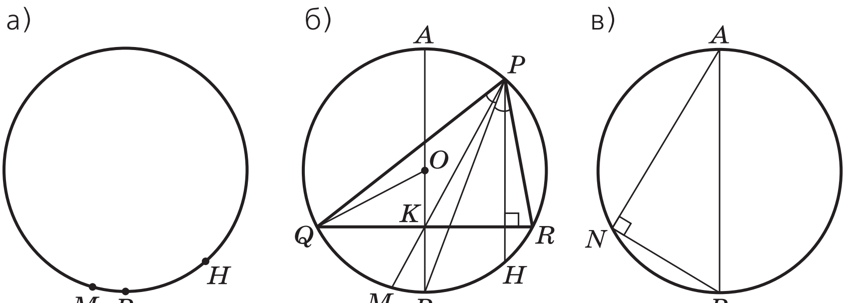


Рис. 112

точке A (рис. 112, *в*), что отрезок BA является диаметром окружности (вписанный прямой угол BNA опирается на полуокружность).

2) Через точку H проведём прямую, параллельную прямой AB, и обозначим буквой P точку пересечения этой прямой с окружностью.

3) Проведём отрезок PM и обозначим буквой K точку пересечения отрезков PM и BA (см. рис. 112, *б*).

4) Построим прямую, проходящую через точку K перпендикулярно к прямой AB, и обозначим буквами Q и R точки пересечения этой прямой с окружностью.

Треугольник PQR — искомый. Действительно, $PH \perp QR$ (так как по построению $PH \parallel AB$ и $AB \perp QR$), поэтому прямая PH содержит высоту треугольника PQR, проведённую из вершины P.

Поскольку $QR \perp AB$ и отрезок AB — диаметр окружности, то $QK = KR$ и $\smile QB = \smile RB$ и, следовательно, прямая PM содержит медиану PK треугольника PQR, а прямая PB содержит биссектрису этого треугольника, проведённую из вершины P.

Итак, построенный треугольник PQR удовлетворяет всем условиям задачи.

214.

Вопрос: сколько углов, меньших $10°$, может иметь выпуклый многоугольник?

Решение. Если угол выпуклого многоугольника меньше $10°$, то смежный с ним внешний угол больше $170°$, а сумма всех внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $360°$. Поэтому внешних углов, бо́льших $170°$, не может быть более двух и, следовательно, выпуклый многоугольник может иметь не более двух углов, меньших $10°$.

Примером многоугольника с двумя углами, меньшими $10°$, является треугольник с углами $9°$, $9°$ и $162°$.

Ответ: не более двух.

218.

а) **Дано:** выпуклый четырёхугольник $ABCD$; окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются диагонали AC в одной точке (точка K на рис. 113, *а*).

Доказать: в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

б) **Дано:** в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

Доказать: окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются диагонали AC в одной точке.

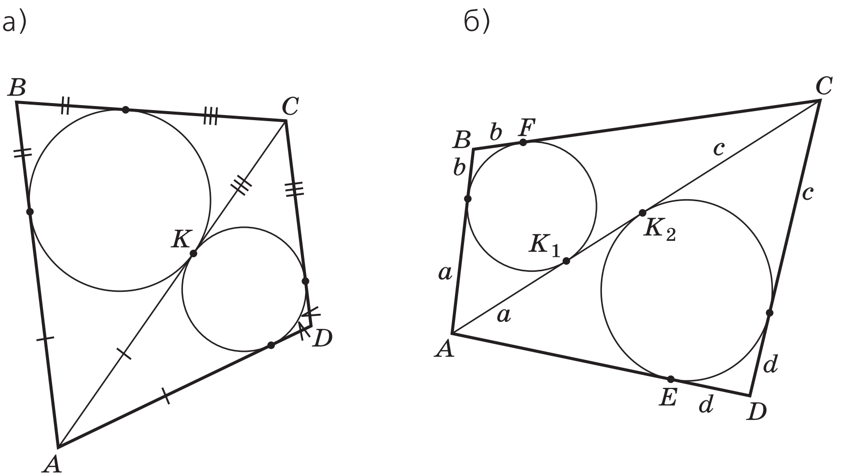


Рис. 113

Решение. а) На рисунке 113, *а* отмечены равные отрезки касательных, проведённые из одной точки. Очевидно, что $AB + CD = AD + BC$ и, следовательно, в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

б) Из условия следует, что

$$AB + CD = AD + BC. \qquad (1)$$

Предположим, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются диагонали AC в разных точках (точки K_1 и K_2 на рис. 113, *б*). Обозначим буквами a, b, c и d длины отрезков касательных так, как показано на рисунке 113, *б*, в частности, $AK_1 = a$, $CK_2 = c$. Тогда $AB + CD = a + b + c + d$, $AE = AK_2 = a + K_1K_2$, $CF = CK_1 = c + K_1K_2$, и, следовательно, $AD + BC = (a + K_1K_2) + d + b + (c + K_1K_2) = a + b + c + d + 2K_1K_2$. Из полученных выражений следует, что $AB + CD < AD + BC$, что противоречит условию (1), поэтому наше предположение неверно, т. е. окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются диагонали AC в одной точке, что и требовалось доказать.

221.

Дано: $\triangle ABC$, AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы (рис. 114, *а*).
Доказать:

$$\frac{3}{4}(AB + BC + CA) < AA_1 + BB_1 + CC_1 < AB + BC + CA. \qquad (1)$$

Решение. Так как медианы треугольника пересекаются в одной точке (обозначим её буквой M) и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины, то $AM = \frac{2}{3}AA_1$ и $BM = \frac{2}{3}BB_1$. Согласно неравенству треугольника (применительно к треугольнику AMB) $AB < AM + BM = \frac{2}{3}(AA_1 + BB_1)$.

Для сторон BC и CA треугольника ABC справедливы аналогичные неравенства: $BC < \frac{2}{3}(BB_1 + CC_1)$, $CA < \frac{2}{3}(CC_1 + AA_1)$.

Складывая три неравенства, приходим к неравенству $AB + BC + CA < \frac{4}{3}(AA_1 + BB_1 + CC_1)$, умножив которое на $\frac{3}{4}$, получим левое из искомых неравенств (1).

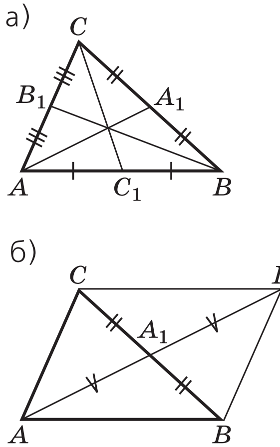


Рис. 114

Для доказательства справедливости правого неравенства (1) продолжим медиану AA_1 на отрезок $A_1D = AA_1$ (рис. 114, *б*) и проведём отрезки BD и CD. Четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм (поскольку его диагонали точкой пересечения делятся пополам), поэтому $BD = CA$. Согласно неравенству треугольника (применительно к треугольнику ABD) $AD < AB + BD$, т. е. $2AA_1 < AB + CA$, откуда $AA_1 < \frac{1}{2}(AB + CA)$. Аналогично получаются неравенства для медиан BB_1 и CC_1: $BB_1 < \frac{1}{2}(AB + BC)$ и $CC_1 < \frac{1}{2}(CA + BC)$. Складывая три неравенства для медиан, приходим к правому из искомых неравенств (1): $AA_1 + BB_1 + CC_1 < AB + BC + CA$.

232.

Дано: четырёхугольник $ABCD$, точки K, L, M и N — середины его сторон (рис. 115).

Доказать: $AC = BD$ тогда и только тогда, когда $KM \perp LN$.

Решение. Четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм (согласно утверждению задачи 61 д) для случая, когда четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, и утверждению задачи 62 д),

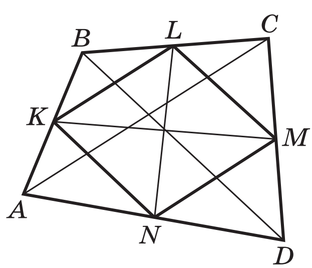


Рис. 115

когда четырёхугольник $ABCD$ невыпуклый), причём $KL = \frac{1}{2}AC$ и $LM = \frac{1}{2}BD$ (поскольку KL и LM — средние линии треугольников ABC и BCD).

Если $KM \perp LN$, то параллелограмм $KLMN$ является ромбом (по признаку ромба), поэтому $KL = LM$ и, следовательно, $AC = BD$.

Докажем обратное утверждение. Если $AC = BD$, то $KL = LM$, поэтому параллелограмм $KLMN$ является ромбом, а диагонали ромба взаимно перпендикулярны, т. е. $KM \perp LN$, что и требовалось доказать.

237.

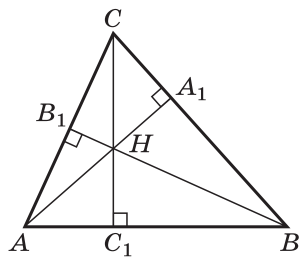


Рис. 116

Дано: $\triangle ABC$, точка H — его ортоцентр (рис. 116).

Доказать: радиус окружности, описанной около треугольника ABH, равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. Основания высот треугольника ABC, т. е. точки A_1, B_1 и C_1, совпадают с основаниями высот треугольника ABH (см. рис. 116). Поэтому окружность Эйлера треугольника ABC, проходящая через точки A_1, B_1 и C_1, совпадает с окружностью Эйлера треугольника ABH, а так как радиус описанной около треугольника окружности в два раза больше радиуса окружности Эйлера, то радиусы окружностей, описанных около треугольников ABH и ABC, равны, что и требовалось доказать.

Замечание. Другой способ решения этой задачи связан с использованием тригонометрических функций, которые вводятся в главе 6; там для стороны треугольника ABC получена формула $AB = 2R \cdot \sin C$, где R — радиус описанной около треугольника ABC окружности.

В четырёхугольнике CA_1HB_1 (см. рис. 116) углы A_1 и B_1 прямые, поэтому $\angle C + \angle A_1HB_1 = 180°$, откуда $\angle A_1HB_1 = 180° - \angle C$, а так как $\angle AHB = \angle A_1HB_1$ (вертикальные углы равны), то $\angle AHB = 180° - \angle C$. Из формулы $AB = 2R \cdot \sin C$ следует, что $R = \frac{AB}{2\sin C}$, а для радиуса R_1 окружности, описанной около треугольника ABH, получаем аналогичное выражение $R_1 = \frac{AB}{2\sin\angle AHB}$. Поскольку $\sin\angle AHB = \sin(180° - \angle C) = \sin C$, то $R_1 = R$, что и требовалось доказать.

240.

Дано: отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 (рис. 117, *а*).

Построить: прямоугольник, диагональ которого равна P_1Q_1, а периметр равен P_2Q_2.

Решение. Предположим, что искомый прямоугольник $ABCD$ построен (рис. 117, *б*). Продолжим его стороны AD и BC на отрезки DE и CF, равные CD, так, как показано на рисунке 117, *б*. Тогда $AE = AD + DE = AD + CD = \frac{1}{2}P_2Q_2$, а четырёхугольник $CDEF$ — квадрат, поэтому $\angle CED = 45°$. Отсюда следует, что искомый прямоугольник $ABCD$ можно построить следующим образом:

1) построим середину отрезка P_2Q_2;

2) построим треугольник ACE, в котором $AC = P_1Q_1$, $AE = \frac{1}{2}P_2Q_2$ и $\angle CEA = 45°$ (это можно сделать так: построим угол с вершиной E, равный $45°$, на одной из его сторон отложим отрезок $AE = \frac{1}{2}P_2Q_2$, проведём окружность с центром A радиуса P_1Q_1 и точку пересечения этой окружности со второй стороной угла обозначим буквой C);

3) построим высоту CD треугольника ACE;

4) после этого достроим прямоугольный треугольник ACD до прямоугольника $ABCD$ (для этого нужно провести через точки A и C прямые, перпендикулярные соответственно к прямым AD и CD).

Прямоугольник $ABCD$ — искомый, поскольку его диагональ AC равна P_1Q_1 (по построению), а $AD + CD = AD + DE = \frac{1}{2}P_2Q_2$, поэтому периметр прямоугольника $ABCD$ равен P_2Q_2. Таким образом, построенный прямоугольник $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи.

Замечание. На втором шаге построения, т. е. при построении треугольника ACE, окружность с центром A радиуса P_1Q_1 может иметь одну общую точку со стороной угла с вершиной E, может иметь две общие точки и может не иметь общих точек с этой стороной. Поэтому задача может иметь одно решение, может иметь два решения и может не иметь решений.

Рис. 117

245.

Дано: на каждой из сторон квадрата отметили по точке, а сами стороны стёрли.

Построить: по оставшимся четырём точкам стёртый квадрат.

Решение. Сначала докажем следующее утверждение: если концы одного из двух взаимно перпендикулярных отрезков лежат на противоположных сторонах квадрата (или их продолжениях), а концы другого — на двух других противоположных сторонах (или их продолжениях), то эти отрезки равны.

Рассмотрим взаимно перпендикулярные отрезки MN и PQ, концы которых лежат на сторонах квадрата $ABCD$ (рис. 118, *а*), и докажем, что $MN = PQ$.

Проведём перпендикуляры MH и PK соответственно к CD и BC. Тогда $MH \perp PK$ и $MH = PK = AB$, а острые углы NMH и QPK равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны ($MN \perp PQ$, $MH \perp PK$). Прямоугольные треугольники MHN и PKQ равны по катету ($MH = PK$) и прилежащему острому углу ($\angle NMH = \angle QPK$). Следовательно, $MN = PQ$, что и требовалось доказать.

Отметим, что если концы (либо один из концов) какого-то из взаимно перпендикулярных отрезков лежат не на сторонах квадрата, а на их продолжениях, как, например, концы отрезка M_1N_1 на рисунке 118, *а*, то эти взаимно перпендикулярные отрезки также равны. В самом деле, так как $MN \perp PQ$ и $M_1N_1 \perp PQ$, то $MN \parallel M_1N_1$, поэтому четырёхугольник MNN_1M_1 — параллелограмм и $M_1N_1 = MN = PQ$.

Воспользуемся доказанным утверждением для решения задачи. На рисунке 118, *б* штриховыми линиями изображены стёртые стороны квадрата $ABCD$, на которых отмечены точки M, N, P и Q. Требуется по этим точкам восстановить квадрат $ABCD$ с помощью циркуля и линейки.

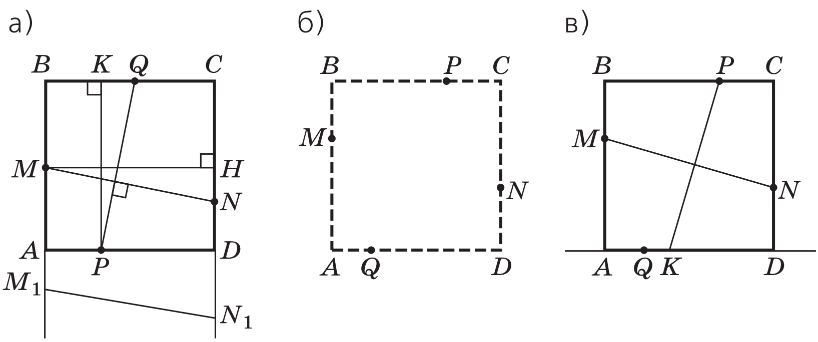


Рис. 118

Проведём отрезок MN, построим луч с началом P, перпендикулярный к MN, и отложим на нём отрезок $PK = MN$ (рис. 118, *в*). В силу доказанного утверждения точка K будет лежать на стороне AD искомого квадрата (или на её продолжении). Через точки Q и K проведём прямую и построим перпендикуляры MA и ND к этой прямой. Затем на лучах AM и DN отложим отрезки AB и DC, равные AD. Остаётся провести отрезок BC, и мы получим искомый квадрат $ABCD$. В самом деле, так как по построению $AB \perp AD$, $DC \perp AD$ и $AB = DC = AD$, то четырёхугольник $ABCD$ — квадрат. Также по построению точки Q, M и N лежат на его сторонах, а то, что точка P лежит на стороне BC, следует из равенства и перпендикулярности отрезков KP и MN.

Замечание. Может оказаться так, что полученная в процессе построения точка K совпадёт с данной точкой Q. В этом случае существует бесконечно много квадратов, на сторонах каждого из которых лежат данные точки M, N, P и Q: если через точки P и Q провести произвольные параллельные прямые, а через точки M и N — перпендикулярные к ним прямые, то точки пересечения этих прямых будут вершинами одного из таких квадратов. Таким образом, в этом случае невозможно восстановить именно тот квадрат, стороны которого были стёрты.

250.

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 119).

Доказать: произведение стороны треугольника на высоту, проведённую к ней, не зависит от того, какая из сторон выбрана.

Решение. 1) Проведём высоту CH треугольника ABC. Если угол A острый (рис. 119, *а*), то $CH = AC \cdot \sin A$. Если угол A тупой (рис. 119, *б*), то $CH = AC \cdot \sin\angle CAH$, а так как $\angle CAH = 180° - \angle A$, то $\sin\angle CAH = \sin(180° - \angle A) = \sin A$ (по формуле приведения). Наконец, если угол A прямой (рис. 119, *в*), то точка H совпадает с точкой A, $\sin A = \sin 90° = 1$, поэтому равенство $CH = AC \cdot \sin A$ также выполняется. Итак, в любом случае $CH = AC \cdot \sin A$.

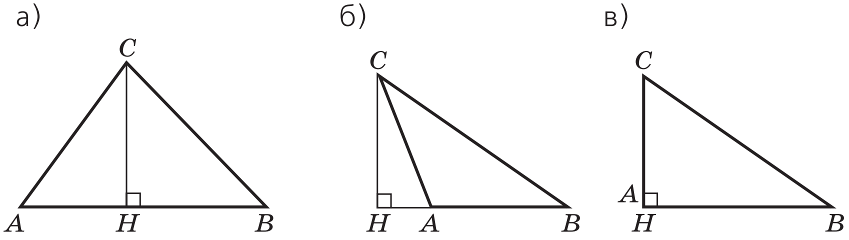


Рис. 119

2) Согласно теореме п. 73 справедливы равенства $AC = 2R\sin B$ и $AB = 2R\sin C$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Используя эти равенства, получаем: $AB \cdot CH = 4R^2 \sin A \sin B \sin C$. В точности такое же выражение получится, если взять вместо стороны AB и высоты CH любую другую сторону треугольника ABC и проведённую к ней высоту, что и доказывает утверждение задачи.

253.

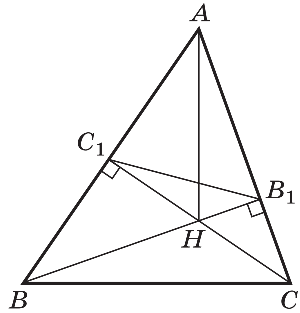


Рис. 120

Дано: $\triangle ABC$, точка H — его ортоцентр, R — радиус описанной окружности.

Доказать: $AH = 2R|\cos A|$.

Решение. Рассмотрим случай, когда угол A острый (рис. 120).

Проведём высоты BB_1 и CC_1 треугольника ABC. Согласно утверждению задачи 145 ж) треугольник AC_1B_1 подобен треугольнику ABC, а коэффициент подобия равен $\cos A$ (с. 107). Проведём окружность с диаметром AH. Так как отрезок AH является гипотенузой прямоугольных треугольников AB_1H и AC_1H, то вершины B_1 и C_1 прямых углов этих треугольников лежат на проведённой окружности (этот факт был установлен ещё в 7 классе). Следовательно, эта окружность является описанной около треугольника AB_1C_1. Отношение её диаметра к диаметру окружности, описанной около треугольника ABC, равно коэффициенту подобия треугольников AC_1B_1 и ABC, т. е. равно $\cos A$: $\frac{AH}{2R} = \cos A$, откуда $AH = 2R\cos A$.

Тем самым для случая, когда угол A острый, утверждение задачи доказано.

Для случая, когда угол A тупой, доказательство проводится аналогично, но теперь нужно воспользоваться результатом задачи 146 ж).

Наконец, если угол A прямой, то ортоцентр H треугольника ABC совпадает с вершиной A, поэтому $AH = 0$, а так как $\cos A = \cos 90° = 0$, то равенство $AH = 2R|\cos A|$ верно и в этом случае.

258.

Доказать: если $\alpha + \beta \leqslant 180°$, то

а) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;

б) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Решение. а) Пусть $\alpha < 90°$ и $\beta < 90°$. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle B = \alpha$, $\angle C = \beta$, и проведём его высоту AA_1 (рис. 121, *а*). Если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R, то $BC = 2R\sin A = 2R\sin(180° - (\alpha + \beta)) = 2R\sin(\alpha + \beta)$.

С другой стороны, $BC = BA_1 + A_1C = AB\cos\alpha + AC\cos\beta$ (см. рис. 121, *а*), а так как $AB = 2R\sin\beta$ и $AC = 2R\sin\alpha$, то $BC = 2R(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$. Приравнивая два полученных выражения для BC, приходим к искомой формуле $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Справедливость этой формулы в случае $\alpha > 90°$, $\alpha + \beta < 180°$ можно доказать аналогичным образом, используя рисунок 121, *б*, а для случаев $\alpha = 90°$, $\beta < 90°$ и $\alpha + \beta = 180°$ это нетрудно сделать с помощью формул приведения (целесообразно предложить выполнить это упражнение наиболее сильным учащимся).

б) Снова рассмотрим случай, когда $\alpha < 90°$ и $\beta < 90°$, а кроме того, $\angle A < 90°$ (рис. 121, *в*), на этом рисунке AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC, точка H — его ортоцентр. Так как $AA_1 = AB\sin\alpha$ и $AB = 2R\sin\beta$, то $AA_1 = 2R\sin\alpha\sin\beta$.

С другой стороны, $AA_1 = AH + HA_1$, а $AH = 2R\cos A$ (задача 253). Поскольку $\angle A = 180° - (\alpha + \beta)$, то $AH = 2R\cos(180° - (\alpha + \beta)) = -2R\cos(\alpha + \beta)$.

Далее, согласно утверждению той же задачи 253, справедливо равенство $BH = 2R\cos B = 2R\cos\alpha$. Заметим теперь, что $\angle BHA_1 = \angle C$ (так как это острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами), т. е. $\angle BHA_1 = \beta$. Из прямоугольного треугольника BA_1H получаем: $HA_1 = BH\cos\angle BHA_1 = 2R\cos\alpha\cos\beta$.

Итак, $AA_1 = AH + HA_1 = 2R(\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha + \beta))$.

Приравнивая два выражения для AA_1, приходим в рассматриваемом случае к искомой формуле $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Целесообразно предложить наиболее сильным учащимся обосновать эту формулу для других возможных случаев.

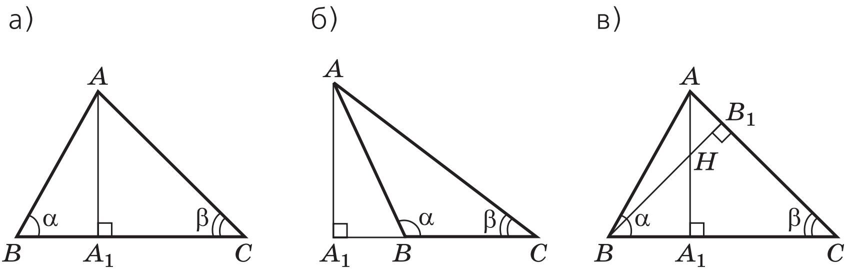


Рис. 121

260.

Дано: четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 122, *а*).

Доказать: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ (теорема Птолемея).

Решение. Обозначим буквами α, β и γ величины вписанных углов так, как показано на рисунке 122, *б*. При этом одинаковую величину имеют углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Радиус окружности обозначим буквой R. Согласно теореме п. 73 справедливы равенства $AC = 2R\sin(\alpha+\beta)$, $BD = 2R\sin(\alpha+\gamma)$, $AB = 2R\sin\gamma$, $CD = 2R\sin\beta$, $AD = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\angle BDC = 2R \times \sin(180° - (\alpha+\beta+\gamma)) = 2R\sin(\alpha+\beta+\gamma)$. Используя эти формулы, а также формулы, выведенные при решении задачи 258, и основное тригонометрическое тождество, получаем:

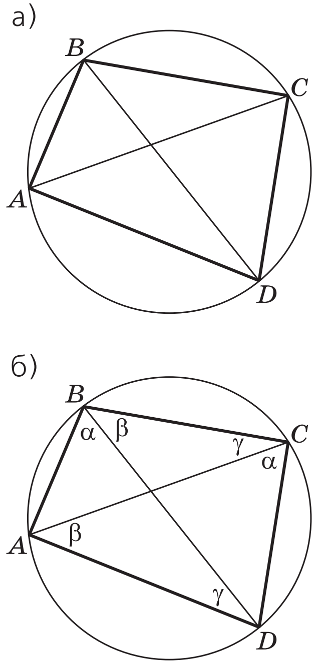


Рис. 122

$$AC \cdot BD = 4R^2 \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma) = 4R^2(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \times (\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma) =$$
$$= 4R^2(\sin^2\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos^2\alpha\sin\beta\sin\gamma) =$$
$$= 4R^2[\sin^2\alpha(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma) + \sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\alpha(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma)] =$$
$$= 4R^2[\sin^2\alpha\cos(\beta+\gamma) + \sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)];$$

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = 4R^2\sin\beta\sin\gamma + 4R^2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\gamma) =$$
$$= 4R^2[\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha(\sin\alpha\cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha\sin(\beta+\gamma))] =$$
$$= 4R^2[\sin\beta\sin\gamma + \sin^2\alpha\cos(\beta+\gamma) + \sin\alpha\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)].$$

Сравнивая полученные выражения для $AC \cdot BD$ и $AB \cdot CD + AD \cdot BC$, приходим к искомому равенству $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

261.

Дано: окружность описана около равностороннего треугольника ABC, точка M лежит на окружности (рис. 123).

Доказать: один из отрезков MA, MB и MC равен сумме двух других.

Решение. Пусть, например, точка M лежит на дуге BC так, как показано на рисунке 123. Докажем, что в этом случае $MA = MB + MC$. По теореме Птолемея применительно к вписанному четырёхугольнику $ABMC$ получаем:

$$MA \cdot BC = MB \cdot CA + MC \cdot AB.$$

Так как $AB = BC = CA$ (по условию), то, разделив обе части равенства на AB, приходим к искомому равенству $MA = MB + MC$.

Замечание. Если точка M совпадает с одной из вершин треугольника ABC, например с вершиной C, то $MC = 0$, $MA = MB = AB$, и равенство $MA = MB + MC$ также выполняется.

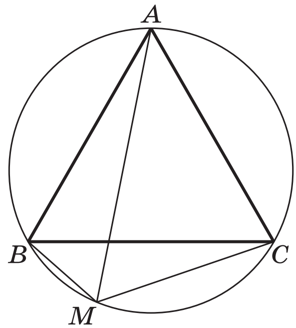


Рис. 123

262.

Дано: Углы A, B и C треугольника ABC связаны соотношениями $\angle B = 2\angle A$ и $\angle C = 2\angle B$ (рис. 124, *а*).

Доказать: $\dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$.

Решение. 1) Так как $\angle B = 2\angle A$ и $\angle C = 2\angle B = 4\angle A$, то $180° = \angle A + \angle B + \angle C = 7\angle A$, поэтому

$$\angle A = \frac{180°}{7},\ \angle B = \frac{360°}{7},\ \angle C = \frac{720°}{7}.$$

2) Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC (рис. 124, *б*). Так как $\smile BC = 2\angle BAC = \dfrac{360°}{7}$, то хорда BC равна стороне правильного семиугольника, вписанного в эту окружность, а поскольку $\smile AC = 2\angle ABC = 2 \cdot \dfrac{360°}{7}$, то точка A является одной из вершин правильного семиугольника $ADCBEFG$ (см. рис. 124, *б*).

3) По теореме Птолемея применительно к вписанному четырёхугольнику $ACBE$ получаем:

$$AB \cdot CE = AC \cdot BE + AE \cdot BC,$$

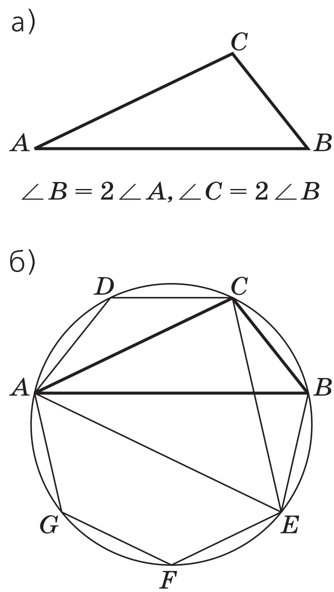


Рис. 124

а так как $CE = AC$, $BE = BC$ и $AE = AB$ (хорды, стягивающие равные дуги, равны), то $AB \cdot AC = AC \cdot BC + AB \cdot BC$.

Разделив это равенство на произведение $AB \cdot AC \cdot BC$, приходим к искомому равенству $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

267.

Дано: точка M лежит на биссектрисе угла O, прямая p пересекает стороны угла в точках A и B, $OA = a$, $OB = b$ (рис. 125, *а*).

Доказать: величина $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ не зависит от выбора прямой p.

Решение. 1) Проведём прямую $MN \parallel OB$ (точка N лежит на луче OA, рис. 125, *б*). Тогда $\angle ANM = \angle AOB$ (соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых MN и OB секущей OA).

2) $\triangle ANM \sim \triangle AOB$ (по второму признаку подобия треугольников: $\angle ANM = \angle AOB$, угол A — общий), поэтому $\frac{AB}{AM} = \frac{OB}{MN}$ или $\frac{AM + MB}{AM} = \frac{b}{MN}$, откуда получаем:

$$1 + \frac{MB}{AM} = \frac{b}{MN}.$$

3) По теореме о биссектрисе треугольника $\frac{MB}{AM} = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}$ и, следовательно, $1 + \frac{b}{a} = \frac{b}{MN}$, откуда следует, что $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{MN}$, т. е. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{MN}$.

4) Так как величина $\frac{1}{MN}$ не зависит, очевидно, от выбора прямой p, то и величина $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ не зависит от выбора прямой p, что и требовалось доказать.

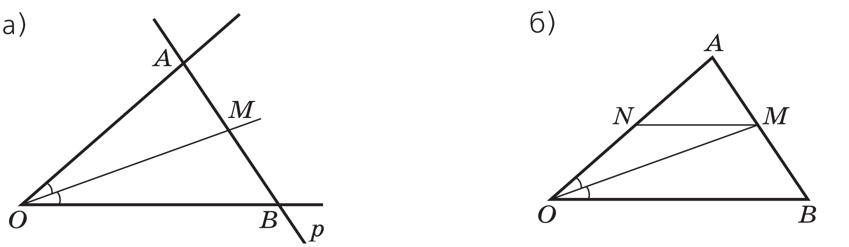


Рис. 125

269.

Дано: продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E, диагонали AC и BD пересекаются в точке O, M — середина AD, N — середина BC (рис. 126, *а*).

Доказать: точки E, O, M и N лежат на одной прямой.

Решение. 1) Проведём отрезок EM. Он пересекается с отрезком BC в точке K (рис. 126, *б*). Так как $BC \parallel AD$, то $\triangle BEK \backsim \triangle AEM$ и $\triangle CEK \backsim \triangle DEM$, поэтому $\frac{BK}{AM} = \frac{EK}{EM}$ и $\frac{KC}{MD} = \frac{EK}{EM}$. Следовательно, $\frac{BK}{AM} = \frac{KC}{MD}$, а поскольку $AM = MD$, то $BK = KC$, т. е. точка K совпадает с серединой N отрезка BC. Итак, прямая EM проходит через середину N отрезка BC.

2) Продолжим отрезок MO до пересечения с отрезком BC в точке P (рис. 126, *в*). Треугольники AOM и COP подобны по второму признаку подобия треугольников: $\angle AOM = \angle COP$ (эти углы вертикальные), $\angle OMA = \angle OPC$ (эти углы накрест лежащие, образованные при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей MP), поэтому $\frac{AM}{PC} = \frac{OM}{OP}$.

Аналогично $\triangle DOM \backsim \triangle BOP$, поэтому $\frac{MD}{BP} = \frac{OM}{OP}$. Из двух написанных пропорций следует, что $\frac{AM}{PC} = \frac{MD}{BP}$, а так как $AM = MD$, то $BP = PC$, т. е. точка P совпадает с серединой N отрезка BC.

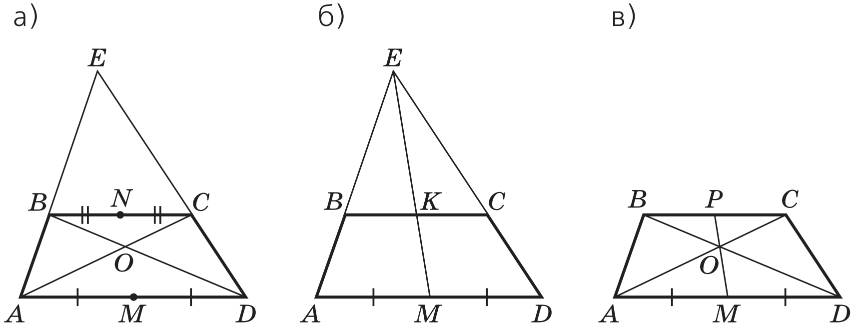


Рис. 126

3) Таким образом, прямые EM и OM проходят через середину N основания BC трапеции $ABCD$. Следовательно, эти прямые совпадают, т. е. точки E, O, M и N лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

278.

Дано: $\triangle ABC$, точки O и O_1 — центры вписанной и описанной окружностей, $OO_1 = d$, радиусы вписанной и описанной окружностей равны r и R (рис. 127).

Доказать: $d^2 = R^2 - 2Rr$ (формула Эйлера).

Решение. Рассмотрим сначала случай неравностороннего треугольника. Пусть, например, $AB \neq BC$, как на рисунке 127, где BD — биссектриса угла B, $OH \perp BC$, $OH = r$, MN — диаметр описанной окружности, проходящий через точку O, $MO_1 = O_1N = R$, $O_1O = d$.

По теореме об отрезках пересекающихся хорд

$$MO \cdot ON = BO \cdot OD. \qquad (1)$$

Так как $MO = MO_1 + O_1O = R + d$, $ON = O_1N - O_1O = R - d$, $BO = \dfrac{OH}{\sin\dfrac{B}{2}} = \dfrac{r}{\sin\dfrac{B}{2}}$ (из прямоугольного треугольника BHO), $OD = AD$ (задача 210) и $AD = 2R\sin\dfrac{B}{2}$ (по теореме п. 73 применительно к треугольнику ABD), то равенство (1) можно записать в виде

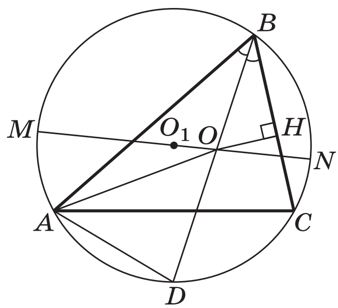


Рис. 127

$$(R+d)(R-d) = \frac{r}{\sin\dfrac{B}{2}}\, 2R\sin\frac{B}{2},$$

откуда и следует искомое равенство $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Если треугольник ABC равносторонний, то центры вписанной и описанной окружностей совпадают, поэтому $d = 0$, а поскольку в этом случае $r = \dfrac{R}{2}$, то $R^2 - 2Rr = 0$, и, таким образом, равенство $d^2 = R^2 - 2Rr$ также выполняется.

285.

Дано: отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 (рис. 128, *а*).

Построить: треугольник ABC, в котором $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, биссектриса AD равна P_3Q_3.

Решение. Предположим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 128, *б*). Проведём отрезок $DE \perp AD$

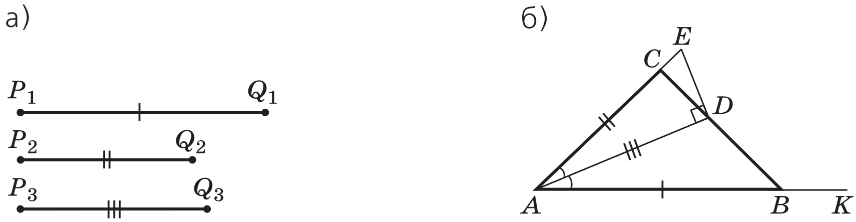


Рис. 128

(точка E лежит на луче AC). Тогда $AE = \frac{2AB \cdot AC}{AB + AC} = \frac{2P_1Q_1 \cdot P_2Q_2}{P_1Q_1 + P_2Q_2}$ (задача 171). Отсюда следует, что искомый треугольник ABC можно построить следующим образом:

1) по данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2 построим отрезок $P_4Q_4 = \frac{2P_1Q_1 \cdot P_2Q_2}{P_1Q_1 + P_2Q_2}$ (как это сделать, мы знаем);

2) построим прямоугольный треугольник ADE по гипотенузе $AE = P_4Q_4$ и катету $AD = P_3Q_3$ (такое построение мы также умеем выполнять);

3) на луче AE отложим отрезок $AC = P_2Q_2$;

4) от луча AD отложим угол DAK, равный углу DAE, так, чтобы лучи AK и AE лежали по разные стороны от прямой AD;

5) проведём прямую CD и обозначим буквой B точку её пересечения с лучом AK; треугольник ABC — искомый.

Действительно, в нём по построению $AC = P_2Q_2$ и биссектриса AD равна P_3Q_3. Остаётся проверить, что $AB = P_1Q_1$. Так как $DE \perp AD$ (по построению), то, согласно утверждению задачи 171,

$$AE = \frac{2AB \cdot AC}{AB + AC} = \frac{2AB \cdot P_2Q_2}{AB + P_2Q_2}.$$

С другой стороны, $AE = \frac{2P_1Q_1 \cdot P_2Q_2}{P_1Q_1 + P_2Q_2}$. Таким образом, для нахождения AB получаем уравнение

$$\frac{2AB \cdot P_2Q_2}{AB + P_2Q_2} = \frac{2P_1Q_1 \cdot P_2Q_2}{P_1Q_1 + P_2Q_2},$$

откуда следует, что $AB = P_1Q_1$.

Итак, построенный треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Содержание